

מד"ר 1 – שיעור 9

השיעור נמשיך עם בעית קושי - הוכחת קיום יחידות. תחילה נזכר במה שעשינו בשיעור שעבר.

אז יש לנו את המשוואה עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} (1) & y' = F(x, y) \\ (2) & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

זו היא בעית קושי למשוואה מסדר ראשון. נזכר שהגדרנו מה זה בעיה מוצגת היטב (קיום פתרון, יחידות שלו, ותלות רציפה בתנאי התחלה). נזכרנו.

שיעור שעבר השתמשנו באות D על מנת לסמן את המלבן שאנו עובדים בו, השיעור נעשה זאת באמצעות האות R (מהמילה האנגלית מלבן) באות D נשתמש על מנת לסמן תחום כלשהוא (לאו דווקא מלבני סגור). אז כמו שאמרנו:

$$f(x, y) \in C(D)$$

$$R = \begin{cases} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{cases} \quad R \subset D$$

מה בדיוק מסמל D כעת? האם תחום כמו בחדוא (קשיר פוליגוני ופתוח)? לא. הוא פשוט קטע שיכול לסגור או פתוח שבו הפונק' מקיימת את תנאי ליפשיץ לוקלית עבור y (לקטעים סגורים).

אז הנחות המשפט היא:

- רציפות הפונקציה f במלבן.

- במלבן מתקיים תנאי ליפשיץ עבור y :

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq L |\Delta y|$$

אם ההנחות מתקיימות, אז קיים פתרון למשוואות (1), (2) והוא יחיד עבור:

$$|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

נזכר איך הראינו יחידות (למעשה נעשה את זה עכשיו בצורה מסודרת):
הצגנו תחילה את (1), (2) בצורה שקולה:

$$(3) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$\psi(x) \equiv \Psi(x)$$

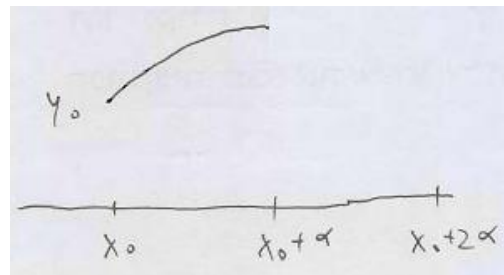
להוכחת היחידות, הנחנו כי יש שני פתרונות פ' ופס", והוכחנו ש:

$$|x - x_0| \leq \alpha < \frac{1}{L}$$

עבור:

כלומר אלפא יכול להיות קטן מ-h.

כלומר בינתיים הוכחנו שיש פתרון אחד במרחק אלפא מ- x_0 :



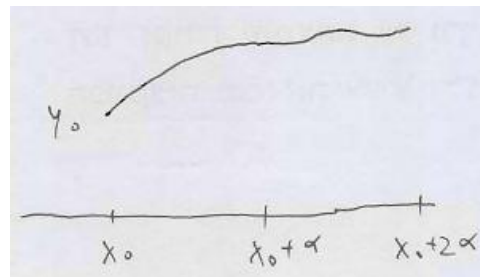
ואם אלפא > h (כלומר $x_0 + \alpha < x_0 + h$) אז מסתכלים על בעיית הקושי הזו:

$$\begin{cases} (1') & y' = f \\ (2') & y(x_0 + \alpha) = \psi(x_0 + \alpha) \end{cases}$$

אז הפתרון ל- (1'), (2') הוא יחיד בקטע:

$$(x_0 + \alpha, x_0 + 2\alpha)$$

ואז:



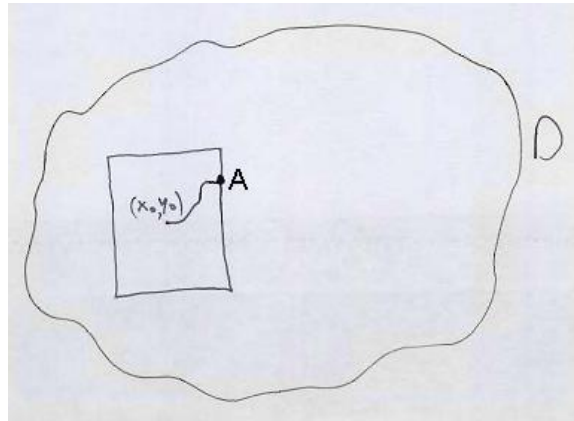
בצורה כזו נוכל להגיע עד ל- $x_0 + h$.

(בגלל שאלפא לא תלוי בנקודה, אלא רק ב-L [שהוא אותו L לכל המלבן] תוך מספר סופי של איטרציות כאלה נוכל להגיע עד $x_0 + h$)

שאלה שעולה היא האם אנחנו יכולים להמשיך את הפתרון אחרי h - וזה יהיה הנושא של השיעור.

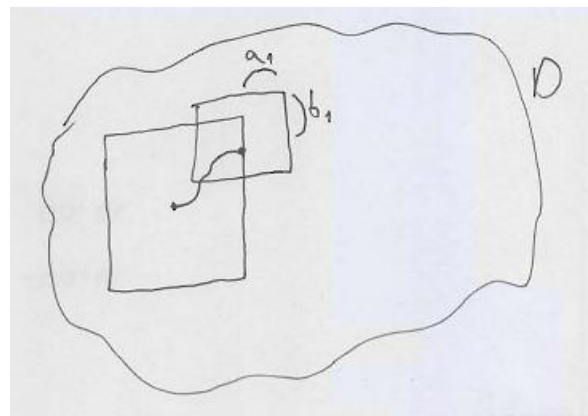
המשכה של פתרון

הוכחנו קיים פתרון ב: $|x - x_0| \leq h$.
אבל יכול להיות שאפשר להמשיך אותה, לדוגמא:



אם הנקודה A נמצאת בתוך התחום D יש סיכוי שנוכל להמשיך אותה.
(נסתכל רק על המשך מצד ימין, כלומר עבור $x > x_0$, מהצד השני בצורה דומה)

במקרה הזה סביב הנקודה A קיים מלבן (שהוא עדיין בתחום D):



לכן, נגדיר בעית קושי כזו:

$$\begin{cases} y' = F \\ y(x_0^{(1)}) = y_0^{(1)} \end{cases}$$

כאשר:

$$\begin{aligned} x_0 + h &= x_0^{(1)} \\ y(x_0 + h) &= y_0^{(1)} \end{aligned}$$

$$R_1 = (x_0^{(1)} \pm a_1, y_0^{(1)} \pm b_1)$$

ועל פי המשפט קיים שם פתרון והוא יחיד. שם = בקטע:

$$(x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1)$$

$$h_1 = \min(a_1, \frac{b_1}{M_1})$$

כלומר את מה שעשינו נוכל לעשות אם הנקודה היא בתוך התחום שלנו.

לפתרון בתוך המלבן הקטן (R_1) נקרא "המשכה של פתרון" של הפתרון מהמלבן R .

דוגמאות

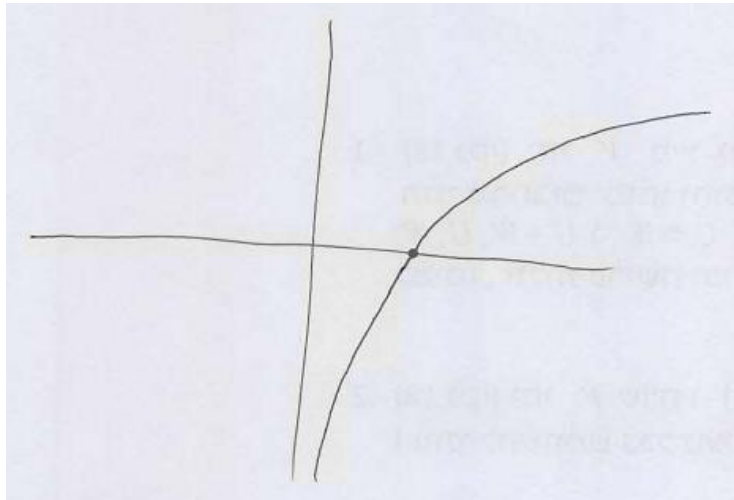
1. נתונה בעיית הקושי הבאה:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

אז מה יכול להיות התחום D ? למעשה, כל תחום שלא מכיל $x=0$, כלומר חלק מציר ה- Y .
אז את המשוואה הזו אנחנו במקרה כבר יודעים לפתור והפתרון שלה הוא:

$$y = -\frac{1}{x} + C, \quad 0 = -\frac{1}{1} + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

כאשר x שואף לאפס, הפתרון שואף למינוס אינסוף, הפתרון נראה כך:



כלומר אם נעשה את העניין הזה עם המלבנים (המשכות), נוכל להמשיך ימינה עד אינסוף, אבל שמאלה רק עד $x=0$ (נוכל להתקרב כמה שנרצה, אך לא נגיע)

2. נתונה בעית הקושי הבאה:

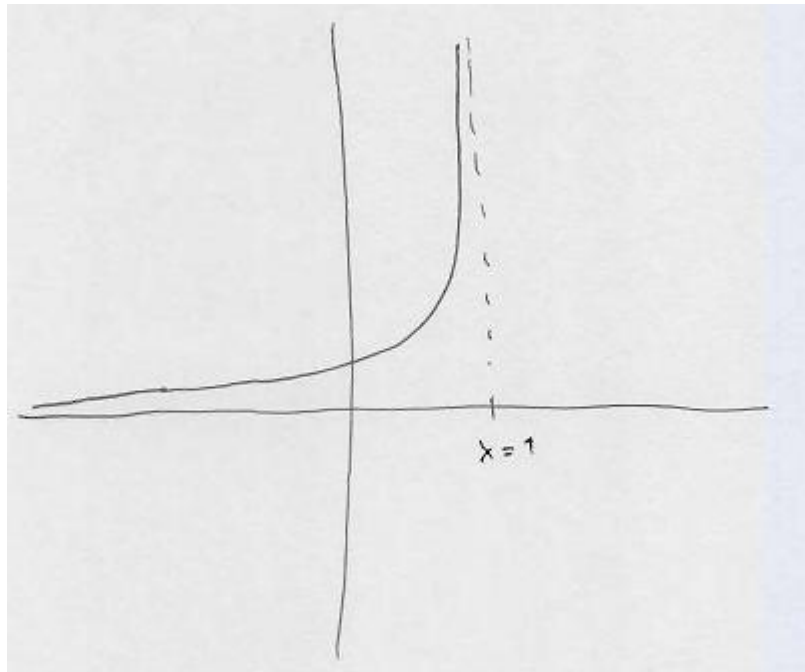
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

אז מה הפתרון הכללי לבעיה זו? זה:

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

בניגוד לבעיה הקודמת, בה ידענו מראש שיש בעיה עם $X=0$ כאן לא ניתן לדעת זאת מההתחלה שיש בעיה עם X מסויים [במקרה הזה $X=1$] (אנו יודעים את זה רק אחרי שפתרנו בעצמנו בשיטות אחרות שאנחנו מכירים. בקודם ראינו את הבעיה עוד לפני הפתרון. ודאו שאתם מבינים למה)

אז איך נראה הפתרון?



לתופעה הזו קוראים הפתרון "התפוצצות" (של הפונקציה), באנגלית: Blow Up. כאן אפשר להתקדם שמאלה עד אינסוף אך ימינה עד $X=1$ (כלומר קרוב ככל שנרצה אליו) ככל שמתקרבים ל-1, הקבוע ליפשיץ שלנו (הרי בכל מלבן של התקדמות של לנו קבוע ליפשיץ אחר) הולך וגדל.

את הדוגמא הזו (וגם את הקודמת והבאה) הבאנו על מנת להראות שלא תמיד ניתן להמשיך פתרון בכל התחום.

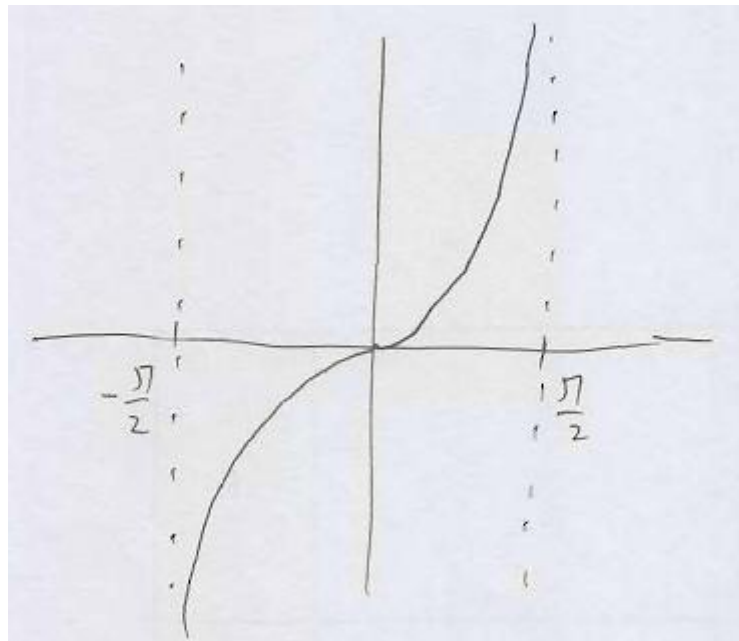
3. נתונה בעיית הקושי הבאה:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

מה הפתרון עבורה?

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx, \quad \arctan y = x + c, \quad 0 = 0 + c \Rightarrow y = \tan x$$

איך הפתרון נראה?



(גם כאן יש "התפוצצות" ובשני הכיוונים אנחנו חסומים עם כמה שנוכל להתקדם)

וכעת לדוגמא החשובה ביותר:

4. משוואה לינארית עם מקדמים רציפים:

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p(x), q(x) \in C(\mathbb{R})$$

כלומר בעיית קושי עם f כזו:

$$f(x, y) = p(x)y + q(x)$$

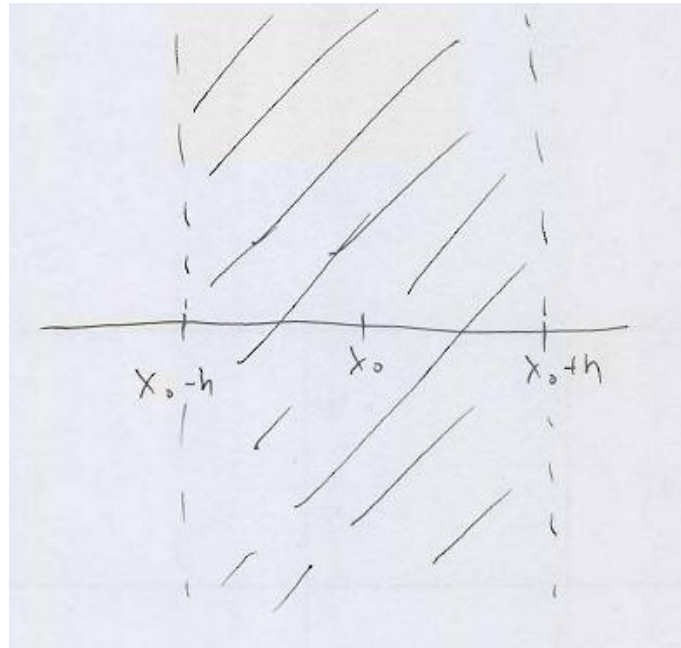
$$(x_0, y_0)$$

ונניח כי נתונה נקודת התחלה כלשהיא:

נראה כי קבוע ליפשיץ אינו תלוי ב- y :

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| = |\rho(x) \Delta y| \leq \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\rho(x)| \cdot |\Delta y|$$

זה אומר שאם נבחר x_0 ו- h , ונקח את הפס (Strip) הזה:



אז היא מקיימת בו את תנאי ליפשיץ הקבוע הוא:

$$L = \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\rho(x)|$$

וזה נכון לגבי לכל h .

ולכן למשוואה הלינארית יש פתרון לבעיית קושי עבור כל x ממשי! וזו תוצאה חשובה מאוד! (נשים רק לב שהפתרון שלנו הוא חסום בכל קטע סופי אך לא חסום בכל הציר, לדוגמא המשוואה $y=y'$).

נרשום אותה בצורה מסודרת:

למשוואה לינארית עם מקדמים רציפים קיים פתרון בכל התחום והוא יחיד.

בשיעורים הקרובים נוכיח את זה ללא שימוש בהמשכה של פתרון.