

מד"ר 1 – שיעור 21

שבוע שעבר התחלנו ללמוד בעיית שטרונג לזיביל. ננסח אותה שוב באופן כללי. אנחנו לא נתעסק עם תיאוריה כללית של זה אלא רק עם מקרים שאותם אנחנו יכולים לפתור.

בעיית שטרונג לזיביל

באופן כללי היא הבעיה:

$$(1) \quad - (p(x) y')' + q(x)y = \lambda y$$

λ - פרמטר. p, q - פונקציות רציפות גזירות פעם אחת.

הבעיה נתונה בקטע כל שהוא $x \in (0, l)$. זו היא בעיית שפה, נתונים שני תנאים:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0 \end{cases}$$

(l אמור להיות l)

נשים לב שהם לא בצורה שבדרך כלל אנחנו נותנים תנאי שפה. יכול להיות שאחד המקדמים יהיה 0 ואז התנאי הוא על הפונ' או הנגזרת (וזה כמו שאנחנו בדרך כלל נותנים).

צד ימין של השווינון בתנאי ההתחלה הוא תמיד 0, והפתרון הטריטוריאלי תמיד קיים לבעיית שטרונג לזיביל. הרעיון של הבעיה הוא למצוא פתרון לא טריטוריאלי.

במטריצות: אם יש לנו מטריצה $A_{n \times n}$ ונתסכל על המשוואה: $Ax = \lambda x$. אם יש λ שמאפשר פתרון לא טריטוריאלי הוא נקרא ערך עצמי. הבעיה ב-S-L היא למצוא ערכים עצמים ופונ' עצמיות.

הגדרה: λ - ע"ע לבעיית שטרונג לזיביל אם קיים פתרון לא טריטוריאלי ל-(1),(2). פתרון ל-(1),(2) זו פונ' עצמית.

האם קיים ערך עצמי או לא אנחנו לא יודעים. כמו כן אנחנו לא יודעים כמה. לעומת זאת, באלגברה, אנחנו יודעים שבאופן כללי יש n ע"ע (חלקם יכולים להיות מרוכבים).

דוגמא

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0, y(l) = 0 \end{cases} \quad (p=1, q=0)$$

אז האם קיים λ כך שקיים פתרון לא טריטוריאלי?

אז את המשוואה $y'' + \lambda y = 0$ אנחנו יודעים לפתור (לינארית עם מקדמים קבועים). נחלק למקרים.

מקרה 1

$\lambda < 0$. האם יכול להיות ערך עצמי שלילי? לא. כי אם למבדה שלילי אז אין מקסימום חיובי או מינימום שלילי, ומכיוון שיש שתי נקודות שפה שהן אפס אז אין פתרון שהוא לא טריוויאלי.

אם עדיין לא השתכנענו אז - הפתרון הכללי הוא הצמד הבסיסי: $e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

כעת נראה איך בפתרון לבעיית שטרונג לזיביל אנחנו משתמשים במה שלמדנו קודם, שכל הפתרונות נתונים על ידי קומבי' לינארית של המערכת הבסיסית. כעת נניח שקיים פתרון, אז הוא מהצורה:

$$y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x}$$

אז האם קיימים c_1, c_2 שהם לא אפס כך שהשוויון הזה מתקיים? אז אנחנו יודעים (מהצבת התנאים) ש:

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

כעת אפשר לראות בעזרת דט' $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & -e^{\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix}$ או שאם פותרים באופן מפורש אנחנו מקבלים

$$e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l} \quad \text{ולזה אין פתרון (עבור } \lambda < 0 \text{)}.$$

מקרה 2

$$y'' = 0 \Rightarrow y = ax + b \quad \text{אז } \lambda = 0$$

(אפשר לפתור גם באופן פורמלי [כלומר לפתור בדרך של משוואות לינאריות הומוגניות], יוצא ש- $r=0$ שורש כפול ואז אחד הפתרונות הוא קבוע, והשני הוא x כפול קבוע)

האם $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי? לומר האם קיים פתרון כאשר $\lambda = 0$?
כעת:

$$ax + b|_{x=0} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$ax + b|_{x=l} = 0 \Rightarrow al = 0 \Rightarrow a = 0$$

לכן $\lambda = 0$ הוא לא ע"ע.

מקרה 3

$\lambda > 0$. אז $y'' + \lambda y = 0$ ולכן הצמד הבסיסי הוא $\cos \sqrt{\lambda}x, \sin \sqrt{\lambda}x$. הפתרון הכללי הוא

$y = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. נציב תנאי השפה אחד ונקבל:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

לכן אם קיים פתרון לא טריוויאלי הוא מהצורה: $y = C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$.

כעת נתסכל על תנאי השפה השני ונקבל:

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

נזכור ש- l נתון. האם קיימים λ כאלה? כן! למבדה צריך להיות כזה ש: $\sqrt{\lambda} l = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
זה תנאי על למבדה. אז הפתרונות:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

זה הוא אוסף של הערכים העצמיים. לכל ערך עצמי מתאימה פונ' עצמית. ל- λ_n מתאימה פונ' עצמי, והיא:

$$\sin \frac{n\pi}{l} x$$

בסך הכל, אוסף הפונ' העצמיות:

$$\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

אם קיימת פונ' עצמית, אז קבוע כפול הפונ' זו גם פונ' עצמית. כלומר פונ' עצמית מוגדרת על כדי קבוע (כמו באלגברה - וקטור עצמי מוגדר עד כדי קבוע). יש סיבות איך בוחרים את הקבוע (סוג של נירמול).
לפעמים עושים נירמול כך שהאינטגרל בריבוע של הפונ' יהיה שווה לאחד.

אז זה הפתרון לבעית שטרנוג לוויביל זו. יש אינסוף ע"ע ולכל ע"ע מתאימה פונ' עצמית.

מאלגברה - לפעמים אפשר למצוא בסיס של וקטורים עצמיים. גם פה קיימת שאלה מקבילה, האם אפשר לפתח כל פונ' רציפה בקטע כטור של הפונ' העצמיות?

פורמלית, אם יש לנו פונ' 'שמתאימה לתנאי השפה רציפה f בקטע $(0, l)$, אז השאלה היא האם קיים טור:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

כלומר האם המערכת של הפונ' העצמית שמצאנו היא מערכת שלמה במרחב הפונ' הללו.

נזכיר - יכול להיות ששמענו או למדנו את הנושא של טור פוריה. טור פוריה הוא פיתוח של פונ' f בצורה הבאה:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

זו הוא טור פוריה קלאסי. מה שאנחנו קיבלנו לא ללא הקוסינוסים. הפתרון שלנו הוא טור פוריה לפי סינוסים. הפונ' שאנחנו מצאנו מהוות מערכת שלמה (כיוון שאנחנו מדברים על הקטע $(0, l)$).

שוב נזכיר - ברמה שאנחנו לומדים את S-L אנחנו מתסכלים על בעיות שאפשר לפתור (למצוא פתרון בצורה מפורשת, כמו שעשינו, מצאנו מערכת של $\sin$) ולא עוסקים בתיאוריה כללית.

דוגמא

אנחנו יכולים לקחת רק משוואה שאנחנו יודעים לפתור אותה. נקח את הדוגמא הקודמת ונשנה את תנאי השפה. נסתכל על הבעיה:

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y'(0) = 0 \quad y(l) = 0 \end{cases}$$

(ההבדל הוא שפה הנזגרת ב-0 היא 0 ולא הערך של הפונ')

אז האם קיימת מערכת של פונ' עצמיות?
נמצא פתרון להאם קיימים פונ' עצמיות. שוב, אנחנו צריכים לחקור את כל המקרים.
המשוואה היא $y'' + \lambda y = 0$.

מקרה 1

$\lambda < 0$. פתרון כללי: $c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$. נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda} c_1 - \sqrt{-\lambda} c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0 \end{cases}$$

נסתכל על הדט' שוב, היא שונה מאפס, ולכן יש לנו רק פתרון טריוויאלי. אין $\lambda < 0$ שהוא ע"ע.

מקרה 2

$\lambda = 0$. כמו קודם, גם אין.

מקרה 3

$\lambda > 0$. אז: $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. נשתמש כעת בתנאי ההתחלה הראשון

ונקבל:

$$-c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot 0 + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

אז הפתרון (ובמידה והוא קיים) צריך להיות מהצורה: $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x$.

האם יש $\lambda > 0$ ע"ע? אז הפונ' הזו מקיימת את התנאי הראשון (נגזרת 0 ב-0), נראה מה התנאי על מנת שתקיים את התנאי השני. התנאי על λ הוא:

$$\cos \sqrt{\lambda} l = 0$$

(שוב - l נתון, זה הוא תנאי על λ). לאיזה λ זה מתאים?

למבדה צריך להיות אחד כזה כך ש- $\sqrt{\lambda} l$ הוא אפס של קוסינוס. לקוסינוס יש אינסוף אפסים ולכן יהיו

לנו אינסוף ערכים עצמיים. כל אפס של קוסינוס יתן לנו ע"ע. אז התנאי הוא: $\sqrt{\lambda} l = n\pi + \frac{\pi}{2}$.

לכל λ שיש לו צורה כזו - הוא ע"ע. אז: $n=0,1,2,\dots$ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right)^2$ הוא אוסף הערכים העצמיים. אז

יש לנו סדרה של ע"ע (שדרך אגב, שואפת לאינסוף) והפונ' העצמיות:

$$\psi_n(x) = \cos \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} x \quad n=0,1,2,\dots$$

אנחנו לומדים את הבעיה הזו בלי ממש לדעת עדיין את השימוש (הטור ניסה לעשות קצת רושם שזה חשוב). נציין בעיקר שיש הבדל בין בעית שפה ולבין בעית קושי ועל ההבדל הזה הוא שלבעית שפה

יכולים להיות פתרון לא טריוויאליים אפילו שתנאי ההתחלה הם אפס (נזכר ב: $y'' + y = 0$, שם למרות

התנאים $y(0) = y(\pi) = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי - $\sin(x)$) לעומת בעית קושי, שם יש רק פתרון טריוויאלי במקרים כאלה.

לאוסף כל הערכים העצמיים של בעית שטרונג לזיביל קוראים "ספקטרום". זו רק הגדרה ולא עושים עם זה כלום עכשיו. אז בשני המקרים האחרונים ידענו את הספקטרום. (בעצם מצאנו שימוש - אפשר להגיד שמצאנו את הספקטרום שזה יותר מגניב מסתם למצוא פתרון)

עוד הבדל בין בעית קושי לשפה - קיום פתרון

נתסכל על הבעיה:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(\pi) = 1 \end{cases}$$

האם יש לה פתרון? אז כיוון שאנחנו יודעים לפתור את המשוואה (בלי קשר לתנאי התחלה) אנחנו יודעים את הצורה הכללית. הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

מתנאי ההתחלה הראשון $c_1 = 0$ ומהשני:

$$c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin x, \quad 1 = c_2 \cdot \sin \pi \quad \times$$

אז לא לכל בעיית שפה יש פתרון (בניגוד לבעית קושי).

משוואות אוילר

משוואות אוילר היא משוואה מסדר שני לינארית, מהצורה:

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$

a, b - קבועים.

אז זו היא משוואה עם מקדמים לא קבועים. נציג אותה כמו שאנחנו אוהבים:

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = 0$$

אז $x=0$ היא נקודה סינגולרית (המקדמים לא רציפים בנקודה זו).

איך לזהות משוואות אוילר? החזקה של x יורדת ממקדם למקדם (כאשר הנגזרת יורדת) - הכוונה ב"לזהות" כי לפעמים נצטרך לעשות איזה הכפלה אותו טריק אלגברי אחר כדי להעביר את המשוואה לצורה הזו.

פתרון משוואות אוילר

אז אנחנו מחפשים פתרון מהצורה: $y = x^r$. מה הרעיון? כשגוזרים את זה החזקה יורדת, ואז סכום החזקות אחרי ההצבה יהיה קבוע. נציב:

$$r(r-1)x^2 x^{r-2} + ax r x^{r-1} + b x^r = 0$$

x^r מופיע בכל המחוברים, וכעת אנחנו מקבלים משוואה ריבועית עבור r :

$$r^2 - r + ar + b = 0$$

תזכורת: אנחנו מחלקים ב- x (למעשה ב- x^r) ומוציאים את $x=0$ מהפתרון. (אנחנו גם ככה לא אוהבים אותו שם כי באיזה שהוא מקום [הכוונה ב"באיזה שהוא מקום" זה "המשך המשפט הולך להיות לא פורמלי בעליל"] בנקודה זו המשוואה הופכת להיות מנוונת - משוואה מסדר ראשון)

דוגמא

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad (x > 0)$$

(הוספנו $x > 0$, כי אחרת היה צריך להזהר לגבי החזקה)
נציג $y = x^r$ ונקבל:

$$r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

ולכן 2 פתרונות (צמד בסיס) הם: $x, \frac{1}{x}$ והפתרון הכללי הוא: $c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$.

משוואות לינאריות מסדר n

נכתוב משוואה לינארית מסדר n בצורה:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \quad a < x < b$$

(כאשר $(a_1, a_2, \dots, a_n, f) \in C(I)$)

נסמן את האגף הימני כ- $Ly = f$ ואז המשוואה היא $Ly = f$.

קיום לבעית מסדר ראשון עם תנאים מסויימים על פונק' f הוכחנו עם איטרציות פירקד. התנאים היו רציפות וקיום תנאי ליפשיץ עבור y . אחר כך עברנו למערכת מסדר ראשון:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

כתבנו את זה בצורה וקטורית:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

(נשים לב ששכל הקורדינאטות של וקטור f תלויה בכל הקורדינאטות של וקטור y)

למערכת זו אנחנו מחפשים פתרון לבעית קושי. לבעית קושי עם תנאים מסויימים על f אז פתרון קיים. פתרון לבעית קושי הוא פתרון לבעיה כאשר נתון גם תנאי התחלה:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

גם לזה מוכיחים קיום בעזרת איטרציות פירקד (f פה צריכה להיות רציפה וליפשיץ לפי y וזו בדיוק אותה הוכחה).

מה שחשוב כרגע זה להבין את הקשר בין המערכת לבין משוואה (1). את זה גם כבר עשינו. אם יש לנו משוואה מסדר n נוכל לתרגם אותה למערכת של n משוואות מסדר ראשון. נעשה זאת שוב.

נסמן:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

ואז משוואה (1) הופכת למערכת של n משוואות (מסדר ראשון):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f - \sum_{k=1}^n a_k \cdot y^{(n-k)} = f - \sum a_k \cdot y_{n-k+1} \end{array} \right.$$

וזו המערכת שמתאימה למשוואה (1). $n-1$ הפונ' הראשונות הן מאותה צורה והאחרונה היא המיוחדת. זאת אומרת שתיאוריה של המערכת אפשר לתרגם לתיאוריה של משוואה (1), בעיקר בעיית קושי.

תנאי התחלה למשוואה (1) הוא:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{array} \right.$$

נשים לב למספר התנאים, נשים לב שכולם באותה נקודה. שמנו לב לשניהם.

משפט קיום ויחידות (מה שלמדנו למשוואות מסדר שני אבל זה יהיה לסדר n)

יהיו לנו כאן שוב את המושגים: מערכת בסיסית, ורונקסיאן, בת"ל, הצגה של כל פתרון כקומ' לינארית של מערכת בסיסית.

המשפט:

נניח $a_i(x), f(x)$ הן פונ' רציפות בקטע $[a, b]$. אז קיים פתרון באותו קטע אשר מקיים את תנאי ההתחלה ב- x_0 והוא יחיד.

(ביקשנו קטע סגור על מנת שהפונ' תהיינה רציפות עד השפה וזה תקיימנה את תנאי ליפשיץ)

את משפט קיום ויחידות אנחנו לא נוכיח אותו, אבל הדרך ברורה - מעבירים למערכת ואז כמו שהוכחנו לגבי בעיית קושי למשוואה מסדר ראשון.

משוואות לינאריות הומוגניות מסדר n

בסדר שני, קומב' של פתרונות הוא פתרון. יש לאופרטור את התכונה:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2$$

כלומר אם y_1, y_2 הם פתרונות למשוואה הומוגנית ($Ly=0$) אז גם קומב' שלהם הוא פתרון.

ואז כמו במשוואות מסדר שני המטרה שלנו כאן זה למצוא בסיס, ואז כל פתרון נוכל למצוא באמצעות קומב' לינארית.

שאלה: האם קיים בסיס למרחב של הפתרונות?

(באופן מעשי אנחנו נפתור רק משוואות עם מקדמים קבועים, אך התיאוריה הזו בינתיים היא כללית לכל המשוואות הלינאריות מסדר n)

בניסוח שקול, האם קיימים פונ' $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ (שמנו k כי אנחנו לא יודעים כמה ואם יש להם

קשר ל-n) כך שכל פתרון למשוואה $Ly=0$ אפשר להציג בצורה הבאה: $y = \sum_{i=1}^k c_i \psi_i$.

האם אפשר לענות על השאלה על סמך המשפט שיש לנו (מסוף העמוד הקודם)? נראה שכן.

משפט

קיים בסיס.

הוכחה

נקח נקודה $x_0 \in [a, b]$ ואז נגדיר פונקציות $\varphi_i(x)$ בצורה הבאה:
עבור φ_1 :

$$\varphi_1(x_0) = 1, \quad \varphi_1'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

פונ' זו קיימת על סמך משפט קיום (זו שהיא יחידה פחות מעניין אותנו עכשיו).
כעת נגדיר את φ_2 :

$$\varphi_2(x_0) = 0, \quad \varphi_2'(x_0) = 1, \quad \dots, \quad \varphi_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ובסך הכל:

$$\varphi_1(x_0)=1, \varphi_1'(x_0)=0, \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x_0)=0$$

$$\varphi_2(x_0)=0, \varphi_2'(x_0)=1, \dots, \varphi_2^{(n-1)}(x_0)=0$$

⋮

$$\varphi_n(x_0)=0, \varphi_n'(x_0)=0, \dots, \varphi_n^{(n-1)}(x_0)=1$$

$$\gamma(x) = \gamma(x_0) \varphi_1 + \gamma'(x_0) \varphi_2 + \dots + \gamma^{(n-1)}(x_0) \varphi_n$$

כל הפונ' הללו קיימות על סמך משפט קיום.

והשאלה האם זה באמת בסיס. כלומר נקח פתרון כלשהוא והשאלה היא האם אפשר להציג אותו כקומ' של הפונ' הללו.

נקח פתרון $y(x)$, אז נסתכל על הנגזרות שלו ב- x_0 . טענה:

$$\gamma(x) = \gamma(x_0) \varphi_1 + \gamma'(x_0) \varphi_2 + \dots + \gamma^{(n-1)}(x_0) \varphi_n$$

אפשר לבדוק שזה באמת מתקיים (כלומר שהטענה נכונה: נסתכל על הנגזרות של הפונקציה באגף ימין בנקודה x_0 , כנ"ל לגבי הפונקציה באגף שמאל. אנחנו נראה שהם שווים. כעת, על פי היחידות הם שוות.

אם נשים לב זה בדיוק איך שהוכחנו שקיים בסיס בגודל 2 למשוואה לינארית הומוגנית מסדר שני.