

מד"ר 1 – שיעור 13

בשיעור שעבר התחלנו לדבר על משוואות מסדר יותר גבוה (גבוה יותר מ-1). בעיקר על משוואות מסדר שני. היום נלמד על גישה כללית על משוואות מסדר n ומערכות מסדר ראשון. נלמד גם על הקשר בין מערכת (של משוואות) מסדר 1 ומשוואה מסדר n .

צורה כללית של משוואה מסדר n

אנו מדברים על משוואה מפורשת, כלומר "פתורה" עבור הנגזרת ה- n של הפונ'. בצורה הכללית:

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

כאשר $x \in [a, b]$ (יכול להיות גם קטע פתוח) ו- y היא פונ' של x .

פתרון למשוואה זו היא פונ' $y(x)$ אם y היא פונ' שיש לה n נגזרות רציפות ($y \in C^{(n)}$), שמקיימת:

$$\forall x \in [a, b]: y^{(n)}(x) \equiv F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

בעיית קושי עבורה זה כאשר אנו נותנים תנאים לנקודת ההתחלה (המושג הגיע מפיזיקה). בעיית קושי למשוואה (1), היא תוספת של המשוואות הללו: בעיית קושי היא מערכת של משוואות

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad x_0 \in [a, b]$$

אז יש לנו כאן n תנאי התחלה (למשוואה מסדר ראשון היה תנאי התחלה אחד). התחלה - כל התנאים נתונים על נקודה התחלתית - x_0 (כלומר אותו x_0 בכל המשוואות).

יש גם בעיות שפה (אליהן נגיע בהמשך הקורס). דוגמא: $y'' + y = 0$.

למשוואה זו אפשר לתת תנאי התחלה בנק' אחת או שני תנאים בנקודות שונות. אפשר למשל לתת:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

זו בעית שפה. שפה של מה? של הקטע $[0, \pi]$.
 מה הפתרון לבעיה זו? $\text{Asin}(x)$.
 זו בעית שפה - שני נתונים בנק' שונות.

אבל אנחנו מדברים כעת רק על בעית קושי.

הקשר בין משוואה מסדר n למערכת של n משוואות מסדר ראשון

נעבור ממשוואה (1) למערכת (של משוואות) מסדר ראשון בצורה הבאה:

נסמן:

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \\ y_2(x) = y''(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

וכעת מערכת המשוואות השקולה למשוואה (1):

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= y_1(x) \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2(x) \\ &\vdots \\ \frac{dy_i}{dx} &= y_{i+1}(x) \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

(S)

יש לנו כאן n נעלמים (n פונ' מהצורה y)

כעת נוכל נוכיח דברים על מערכת של משוואות מסדר 1, ובגלל שמשוואה מסדר n ניתן להעביר למערכת כזו, הדברים יהיו נכונים גם כלפיה. אנו עושים את זה כי יותר קל להתעסק עם זה מאשר משוואה מסדר n .

צורה כללית של מערכת של n משוואות מסדר 1

היא:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

או הצורה המקוצרת:

$$\forall 1 \leq i \leq n: \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

מה זה בעית קושי עבור המערכת?

לתת n ערכים של פונ'. כלומר לתת ערך של כל פונ'. כלומר לתת: $y_i(x_0) = y_i^0$
פתרון (כללי) למערכת זה n פונ' שמקיימות את המערכת.

עכשיו נכתוב את המערכת בצורה וקטורית. באופן חיצוני היא נראית כמו משוואה אחת מסדר n. ואז כל המשפטים הכלליים על קיום ויחידות של פתרון מעבירים בצורה כזו.

צורה וקטורית של המערכת

נגדיר:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

f היא פונ' וקטורית שתלויה ב-x ובוקטור ה-yים.
ואז מערכת המשוואות הכללית (סומנה קודם ב-S), עוברת ל:

$$(S) \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad (S^*)$$

אבל קודם:

מה זה נגזרת של וקטור? איך נגדיר את זה?

אז טבעי זה לקחת וקטור שכל הקורדינטות שלוהן נגזרות של הוקטור (כלומר לגזור על קורדינאטה בנפרד). נסתכל על (ובין למה הגיוני להגדיר את זה):

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\vec{y}(x+\Delta x) - \vec{y}(x) \right) = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} y_1(x+\Delta x) - y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x+\Delta x) - y_n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

נשים לב! נגזרת של וקטור זה וקטור!

אז המשוואה: $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$ זה שוויון בין שני וקטורים - שקול לשוויון בין כל הקורדינאטות.

סימנו אותה ב- (S^*) למרות שזו כבר לא מערכת (אלא סתם שוויון).

היא המשוואה הוקטורית שהיא שקולה למערכת שלנו.

אלה שני ניסוחים שקולים - אחת בצורה וקטורית ואחת בצורת קורדינאטות.

כעת אפשר לחזור לכל מה שלמדנו על משוואה מסדר 1.

דוגמא

נקח מערכת של 2 משוואות מסדר ראשון:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a(x) \cdot y_1^2 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 \end{cases}$$

מה המשוואה הוקטורית שהיא שקולה למערכת המשוואות הזו?

אז תחילה נכתוב את זה בצורה של קורדינאטות:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a y_1^2 - y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

כעת נגדיר וקטור y ווקטור f :

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha y_1^2 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

וכעת המשוואה בצורה הוקטורית היא:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}$$

נורמה

נגדיר נורמה (וזה לא נורמה שאנו מכירים, אך היא שקולה לה):

נתון וקטור v עם n קורדינאטות:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

איזה נורמות אנו מכירים?
נורמה אוקלידית שהיא:

$$\|\vec{v}\| = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

אנו נגדיר נורמה כזו:

$$|v| = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

אפשר להוכיח שהנורמות האלה שקולות.
מה זה בכלל אומר שהן שקולות? שקיימים שני קבועים (אותם שניים לכל וקטור) כך ש:

$$c_1 |\vec{v}| \leq \|\vec{v}\| \leq c_2 |\vec{v}|$$

לנורמה החדשה שהגדרנו נקרא "ערך מוחלט" (כדי להבדיל מהנורמה האוקלידית).
עם הנורמה הזו אפשר להגדיר תנאי ליפשיץ!

אנו מדברים על מערכת (S^*) [שהיא בעצם משוואה, אבל וקטורית, שזה אומר שוויון בכל הקורדינאטות, שזה בסך הכל כן מערכת...] ורוצים לדבר עם קיום ויחידות של פתרון של מערכת S .

תנאי לישיפיץ

נזכר שתנאי לישיפיץ של פונ' אחת אנו הגדרנו בצורה כזו:

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq L \cdot |\Delta y|$$

לפי הנורמה שאנו הגדרנו, אנו מגדירים עבור פונ' וקטורית:

פונ' וקטורית $\vec{f}$ מקיימת את תנאי לישיפיץ אם:

$$|\vec{f}(x, \vec{y} + \Delta \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{y})| \leq L \cdot |\Delta \vec{y}|$$

כאשר ה"ערך המוחלט" כאן זה הנורמה שאנו הגדרנו. נשים לב שזה הוא שוויון של מספרים. איך זה נראה בצורה של קורדינאטות? בצורה זו אנו צריכים לכתוב את זה לפי הגדרה של נורמה. אז איך נכתוב את השוויון הזה בצורה של קורדינאטות? בעזרת קורדינאטות של f אנו יכולים לכתוב אותו כך:

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x, y_1 + \Delta y_1, \dots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq L \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta y_i|$$

זהו תנאי ליפשיץ (השוויון הזה שקול לשוויון הקודם).
נזכר ש L לא תלוי בכלום - זה צריך להיות אותו L בכל התחום.

וכמו שכבר אמרנו, נוכיח דברים על מערכת של משוואות מסדר 1, ובגלל שמשוואה מסדר n ניתן להעביר למערכת כזו, הדברים יהיו נכונים גם כלפיה. ומה הוא הדבר שאנחנו אוהבים להוכיח עליו דברים אם לא בעיית קושי?

בעיית קושי למערכת

בצורה כללית בעיית קושי למערכת מסדר ראשון היא:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

אז איטרציות פיקרד עבור המערכת:

$$\begin{aligned}\vec{y}_1(x) &= \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2(x) &= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}_1(s)) ds \\ &\vdots \\ \vec{y}_{k+1}(x) &= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}_k(s)) ds\end{aligned}$$

(סתם התחלנו את האיטרציות מאינדקס 1 במקום 0)

נכנס כאן אינטרגל של וקטור. אז כמו שהגדרו נגזרת של וקטור נגדיר גם אינטרגל של וקטור - אינטגרציה עבור כל קורדינאטה בנפרד.