

26.3.09

מד"ר 1 – תרגול 4

נזכר שניה איך אנו פותרים משוואה מדוייקת: מוצאים פונקציית פוטנציאל (זו שסימנו אותה כ- u בשיעור וכ- פס" בתרגול [או להיפך..]), זו שצד שמאל של המשוואה המדוייקת הוא הדיפרנציאל השלם שלה) ואז משוואים אותה לקבוע (וזה פתרון לפי משפט שהוכחנו בכיתה). נזכרו.

שיטת אוילר

אז כעת יש לנו את המשוואה:

$$\begin{cases} \dot{X} = X \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

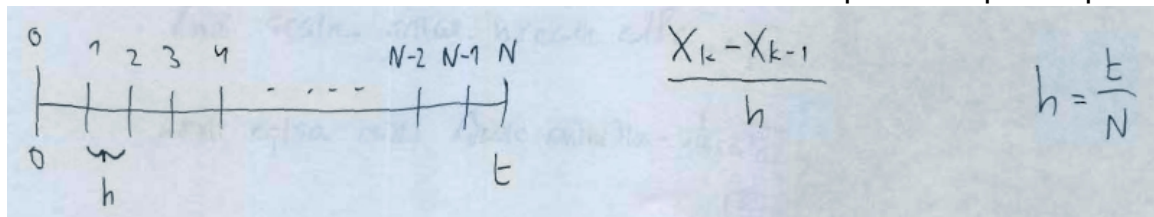
נפתור את המשוואה לפי שיטת אוילר. עפ"י הגדרה:

$$\dot{X} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t) - X(t+h)}{h}$$

ולכן (עבור h קטן):

$$\dot{X} \approx \frac{X(t) - X(t+h)}{h}$$

נחלק את הקטע ל- N קטעים:



ולכן:

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{h} = X_{k-1}$$

וכמה יהיה X_k ? (פישוט המשוואה הקודמת)

$$X_k = (1+h) X_{k-1}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 && \text{(תנאי התחלה)} \\ X_1 &= X_0(1+h) = 1+h \\ X_2 &= X_1(1+h) = (1+h)^2 \\ X_3 &= X_2(1+h) = (1+h)^3 \\ &\vdots \\ X_k &= (1+h)^k && \text{(גאומטרי)} \\ X_N &= (1+h)^N \end{aligned}$$

כעת נשאיף את N (מספר החלקים) לאינסוף:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{N}\right)^N = e^t$$

יש שיטות יותר טובות משיטת אויילר שבהן תכלס משתמשים.

שאלה בכיתה: האם יכול להיות ש- N ישאף לאינסוף אך זה לא יתכנס.
תשובה: כן, אבל לא בקורס שלנו.

כעת נלמד שיטה חדשה:

שיטת פיקרד

אז נניח נתונה המשוואה (עם תנאי ההתחלה):

$$\begin{cases} \dot{X} = X \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

נוכל לכתוב את המשוואה בצורה הבאה (בשיעור הוכחנו את השקילות):
[זו משוואה (3) מהשיעור]

$$X = \int_0^t X(s) ds + 1$$

(אם תנאי ההתחלה היה: $X(0) = 9$ אז היינו כותבים: $X = \int_0^t X(s) ds + 9$)

בשיטת פיקרד עושים ככה:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= X(0) = 1 \\ X_1 &= \int_0^t X_0(s) ds + 1 \\ &\vdots \\ X_n &= \int_0^t X_{n-1}(s) ds + 1 \end{aligned}$$

אם יש גבול לסדרת הפונ' אז הוא מתכנס פתרון.

נמשיך לפתח:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_1 &= \int_0^t X_0 ds + 1 = \int_0^t 1 \cdot ds + 1 = 1 + t \\ X_2 &= \int_0^t (1+s) ds + 1 = 1 + t + \frac{t^2}{2} = \sum_{i=0}^2 \frac{t^i}{i!} \\ X_3 &= \int_0^t (1+s+\frac{s^2}{2}) ds + 1 = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} = \sum_{i=0}^3 \frac{t^i}{i!} \\ &\vdots \\ X_n &= \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} \end{aligned}$$

את השוויון האחרון עלינו להוכיח באמצעות אינדוקציה:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) &= \int_0^t X_n(s) ds + 1 = 1 + \int_0^t \sum_{i=0}^n \frac{s^i}{i!} ds = 1 + \sum_{i=0}^n \int_0^t \frac{s^i}{i!} ds = \\ &= 1 + \sum_{i=0}^n \frac{t^{i+1}}{(i+1) i!} = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

כעת נשאיף את n לאינסוף:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

"בגלל בשתי השיטות יצא אותו דבר, יש סיכוי טוב שעשינו הכל נכון"

מספר ליפשיץ

נתונה המשוואה בצורה כללית:

$$y' = t(x, y)$$

אם מתקיים אי השוויון:

$$|t(x, y_1) - t(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

למספר L נקרא מספר ליפשיץ.
הבעיה שלנו היא איך למצוא את מספר ליפשיץ.

נוסחה זו דומה למשפט לגרנז'. נכתוב את משפט לגרנז':

$$t(x, y_1) - t(x, y_2) = \frac{\partial t}{\partial y}(x, c) \cdot (y_1 - y_2) \quad y_1 \leq c \leq y_2$$

כלומר:

$$|t(x, y_1) - t(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad L = \max_{(x, y) \in D} \left| \frac{\partial t}{\partial y} \right|$$

אז יש לנו דרך לדעת את מספר ליפשיץ במקרים מסויימים (די הרבה למען האמת)

דוגמא

נתונה הפונ':

$$t(x, y) = xy^2 \quad y' = xy^2$$

$$D = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

בתחום:

כעת נמצא את מספר ליפשיץ באמצעות השיטה שלנו:

$$L = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial L}{\partial y} \right| = \max_{(x,y) \in D} |2xy| = 2$$

מצאנו!