

מד"ר 1 – שיעור 20

שיעור שעבר למדנו איך למצוא פתרון למשוואה לינאריות לא-הומוגנית מסדר שני אם ידוע הפתרון למשוואה ההומוגנית. נחזור לזה.

אז ההגדרה של האופרטור (הלינארי):

$$L y = y'' + p(x) y' + q(x) y$$

תכונת הלינאריות אצלו היא:

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2$$

אם יש לנו 2 פתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ (כלומר $L y_1 = 0$, $L y_2 = 0$) בת"ל אז הקומבינציה הלינארית שלהם זה הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית (כלומר כל פתרון אפשר להציג כך).

כעת, איך מוצאים פתרון למשוואה:

$$L y = f(x)$$

בהנחה ש- $f(x)$ רציפה.

מחפשים פתרון פרטי y_p (סימן לפתרון פרטי – particular או prati או particular) מהצורה:

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

אם u_1, u_2 הם קבועים, אז זה פתרון למשוואה ההומוגנית.

זה מה שעשינו כשלמדנו פתרון למשוואה לינארית מסדר ראשון.

תזכורת

משוואה לינארית מסדר ראשון:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

והפתרון למשוואה ההומוגנית:

$$y = C e^{-\int a(x) dx}$$

וכעת אנחנו מחפשים פתרון למשוואה הלא הומוגנית מהצורה:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

זה שיטה שנקראת וריאציה של קבועים. אנחנו עושים הכללה של השיטה הזו - אותה שיטה עבור משוואה לינארית מסדר שני.

אז כעת יש לנו את מערכת המשוואות: (קיפצו לסוף השיעור הקודם אם אתם לא זוכרים מאיפה היא הגיעה)

$$(1) \begin{cases} u_1' \psi_1 + u_2' \psi_2 = 0 \\ u_1' \psi_1' + u_2' \psi_2' = f(x) \end{cases}$$

זו היא מערכת אלגברית עבור u_1' ו- u_2' (לא דיפרנציאלית!). כדי שיהיה קיים פתרון הדט' צריכה להיות שונה מ-0. באותם מילים - התנאי שיהיה פתרון ל- (1) הוא שהדט' יהיה שונה מ-0:

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

אבל נשים לב שאנחנו יודעים שזה שונה מאפס כי זו היא מערכת בסיסית!

אז מ- (1) אנחנו מוצאים פתרונות:

$$u_1' = F_1(x) \quad u_2' = F_2(x)$$

(אין בעיה למצוא אותם, זה פשוט מערכת של 2 משוואות אלגבריות, כמו שעושים בחטיבת ביניים) ואז:

$$u_1(x) = \int F_1(s) ds \quad u_2(x) = \int F_2(s) ds$$

ולכן כל אחד (מ- u_1, u_2) מהם מוגדר עד כדי קבוע.

בסך הכל הפתרון הפרטי שלנו הוא:

$$y_p(x) = u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x)$$

ועכשיו אחרי שמצאנו אותו, הפתרון הכללי הוא:

$$y = y_p + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$$

נעשה כעת דוגמא והכל יהיה ברור.

דוגמא

נתונה המשוואה:

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}$$

בשיעור שעבר נתנו דוגמא שאם באגף ימין עומדת פונ' מיוחדת, אז אפשר לנסות למצוא פתרון פרטי שיש לו את אותה בצורה.

שאלה: האם קיימת פתרון פרטי למשוואה שהוא מהצורה: e^{-x} ?

TA:

$$ce^{-x} + ce^{-x} - 2ce^{-x} = e^{-x}$$

$$0 \neq e^{-x}$$

איך זה קרה? בגלל ש- ce^{-x} הוא בעצמו פתרון למשוואה ההומוגנית. השיטה של למצוא פתרון מאותה הצורה של מה שיש באגף ימין לא תמיד עובדת. אבל השיטה שלמדנו היום היא תמיד עובדת! כעת נעשה אותה!

אז תחילה מחפשים פתרון כללי למשוואה ההומוגנית. (במקרה עכשיו בלי כוונה מצאנו אחת (ce^{-x}))

$$e^{rx}(r^2 - r - 2) = 0$$

$$\Rightarrow r = 2, -1$$

ולכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

כעת מחפשים פתרון למשוואה הלא-הומוגנית מהצורה:

$$y_p = u_1(x) e^{-x} + u_2(x) e^{2x}$$

(אנחנו עושים וריאציה של קבועים - מתייחסים לקבועים כפונ' של x)
אז כעת יש לנו את המערכת:

$$\begin{cases} u_1' \cdot e^{-x} + u_2' e^{2x} = 0 \\ -u_1' \cdot e^{-x} + 2u_2' e^{2x} = e^{-x} \end{cases}$$

כעת נחבר את המשוואות (על מנת להתקדם לקראת הפתרון, זה יבטל את u_1').

$$u_2' = \frac{1}{3} e^{-3x} \quad \text{ולכן: } 3u_2' e^{2x} = e^{-x}$$

$$u_1' = -\frac{1}{3} \quad \text{ולכן: } u_1' e^{-x} = -\frac{1}{3} e^{-3x} e^{2x} \quad \text{ואז:}$$

כעת נצבע אינטגרציות על מנת למצוא את u_1 ו- u_2 :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{x}{3} \\ u_2 = -\frac{e^{-3x}}{9} \end{cases}$$

וכעת הפתרון הפרט שלנו הוא:

$$y_p = -\frac{x}{3} e^{-x} - \frac{1}{9} e^{-x}$$

אנחנו יכולים להוסיף קבוע, אבל אנחנו מחפשים איזה שהוא פתרון פרטי, לכן זה בסדר לנו. אבל - **אל לנו להוסיף כאן קבוע שרירותי!!!** כי אז בפתרון הכללי למשוואה הלא-הומוגנית אנחנו נקבל 3 קבועים שרירותיים! וזה לא נכון!

נשים לב:

בפתרון הפרטי מופיע חלק (המחובר הימיני) שהוא פתרון למשוואה ההומוגנית. לכן כפתרון פרטי מספיק לקחת את המחובר השמאלי.

לכן בסך הכל הפתרון הכללי הוא:

$$y = -\frac{x}{3}e^{-x} - \frac{1}{9}e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

ואם שמנו לב אז:

$$y = -\frac{x}{3}e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

למעשה, קיבלנו כאן משהו כללי: כאשר f היא פתרון למשוואה ההומוגנית אז הפתרון הפרטי הוא פולינום קבוע f (במקרה זה הפולינום הוא פונ' לינארית).

כעת נוסיף עוד תנאי קושי:

$$\begin{cases} y'' - y - 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

תזכורת

ממשפט היחידות:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) \equiv 0$$

כי אפס הוא פתרון ממשפט היחידות הוא היחיד.

מכאן זה אלגברה על מנת למצוא את הקבועים לבעיית הקושי.

עד עכשיו התעסקנו עם בעיית קושי. עכשיו אנחנו רוצים לציין ולהתסכל על בעיית שפה - כלומר כאשר אנחנו נותנים שני תנאים בנקודות שונות. לא נתעמק בזה הרבה אבל משהו צריך לדעת.

בעיית שפה

לדוגמא, נתונה המשוואה:

$$y'' + y = 0 \quad x \in [0, \pi]$$

ונתון שני תנאים בנקודות הקצה:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

בבעיית קושי אם שני התנאים הם אפס, אז הפתרון היחיד הוא אפס טריוויאלי (ממשפט היחידות). כאן שני התנאים הם אפס, ואפס הוא אכן פתרון, אך קיים גם פתרון לא טריוויאלי. מה הוא? $\sin(x)$. ולא רק הוא גם: $C\sin(x)$. אז בעצם קיימים אין סוף פתרונות לא טריוויאליים.

סטיה קלה מהנושא

במקרה הזה אין פתרון אחר (כלומר אין עוד פתרון בלתי תלוי). איך מוכיחים את זה? פתרון כללי למשוואה הזו הוא:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(וזה בלי קשר לתנאים כל שהם, פשוט פתרון כללי)
כעת נציב את התנאים שלנו:

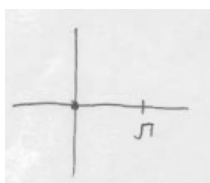
$$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ולכן נקבל שכל הפתרונות הם $C\sin(x)$.

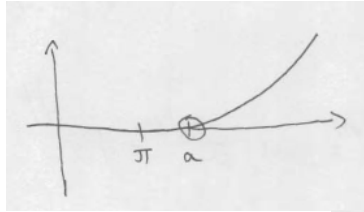
לעומת זאת, למשוואה:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

אין פתרון לא טריוויאלי. נראה זאת על סמך מה שלמדנו בשבוע שעבר - עקרון מקסימום. המקדם של y הוא מספר שלילי (-1) הוא ולכן מתקיים העקרון. הגרף:



צריך לעבור ב- $(0,0)$. כעת הוא צריך להגיע ב- π ל- 0. אם הפונ' תעלה או תרד, יהיה לה מקסימום חיובי או מינימום שלילי. לכן הפתרון היחיד הוא הטרינומילי. זה כאשר הסתכלנו בתחום $[0, \pi]$. למעשה גם אם נקח את כל $\mathbb{R}$ הפתרון היחיד יהיה הטרינומילי, ולא יתכן מצב כזה:



בו הפונקציה היא – זהותית בקטע $[0, \pi]$ (שם הראינו שהיא חייבת להיות) אבל אחר כך עולה. כי אז נתסכל על הנקודה בה הגרף מתחיל לעלות (נסמנה ב- a), ומהנחת רציפות הנגזרת, בנקודה זו ערך הפונ' הוא 0 וערך הנגזרת הוא 0. כעת נסתכל על בעית קושי שזה תנאי ההתחלה שלה (כלומר $f(a)=0$ ו- $f'(a)=0$) ונקבל (מיחידות הפתרון של בעית קושי) שהפתרון היחיד למשוואה שמקיים את התנאים הוא הפונ' שהיא זהותית 0. למעשה, אפילו לא היינו צריכים את זה, יכולנו לקחת נקודה כזו גם לפני a (שם הערך והנגזרת הם 0). למעשה 2, הכי נכון להוכיח את זה בצורה הבאה: לפונ' יש 2 אפסים. אם היא תהיה חיובית או שלילית באיזו שהיא נקודה בתחום – מתחייב שיהיה לה מקסימום חיובי או מינימום שלילי.

אז יש משוואות שקיימים פתרונות לא טרינומילי עם 0 בתנאי השפה, ויש כאלה שלא.

בעיות Sturm-Liouville

בעיות מסוג זה (תנאי שפה) מופיעות בבעיות הסוג Sturm-Liouville. הם קשורות לבעיות פיזיקליות של פתרון משוואות חלקיות. דוגמא לבעיית Sturm-Liouville היא בעיה כזו:

$$(S-L) \begin{cases} - (p(x)y')' + q(x)y = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(אפשר גם שיהיו תנאים על הנגזרת)

המטרה היא למצוא ערך של λ כך שקיים פתרון לא טרינומילי לבעיית $(S-L)$ נשים לב ש- 0 הוא תמיד פתרון והשאלה היא האם קיים עוד פתרון.

אנחנו נראה דוגמאות כאלה עבור q, p קבועים. קיימת תיאוריה על הערכים של λ , ו- λ שמקיים את התנאי השאלה נקרא ערך עצמי של הבעיה. למשל בדוגמא הקודמת, $\lambda = -1$ היה ערך עצמי.

בשיעור הבא נדבר על זה יותר בהרחבה.