

25.3.09

מד"ר 1 – שיעור 8

שיעור שעבר דיברנו על משפט לגבי קיום יחידות של פתרון בעית קושי. נזכר בכך תחילה. הבעיה:

$$\begin{cases} (1) & y' = f(x, y) \\ (2) & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם בתחום D:

$$D: |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b$$

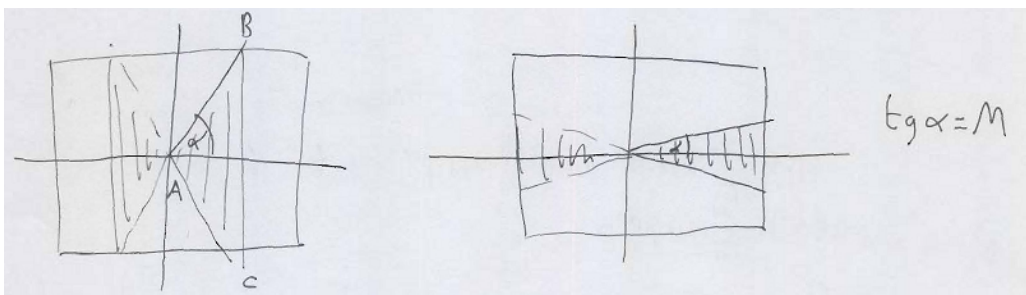
מתקיים תנאי ליפשיץ (לפי y) [שהוא יותר חלש מהגזירות של f לפי y , שממנה בפרט נובעת חסימות הנזגרת כי זה קטע סגור]:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

אז קיים פתרון $y(x)$ יחיד בקטע: $|x - x_0| \leq h$, כך ש: (נגדיר את h)

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad M = \max_D f$$

כמו כן, נזכר בציורים היפים שצירנו ונזכר מה משמעותם:



לסיום החזרה על השיעור הקודם, נזכר כי טענו (והוכחנו) כי פתרון למשוואה (1) (2) קיים אם"ם הוא פתרון למשוואה 3:

$$(3) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

כלומר כדי להוכיח קיום יחידות, נוכיח קיום יחידות למשוואה אינטגרלית (3).

למעשה בטענה שהוכחנו היה חסר פרט קטן, ולכן נטען אותה שוב, הפעם בצורה נכונה:
טענה: פונ' רציפה (היה חסר בשיעור שעבר) פ' של x , הוא פתרון לבעיה (1), (2) אם"ם הוא פתרון למשוואה אינטגרלית 3.

הסבר התיקון:

כדי שתהיה משמעות לנוסחה (3) צריך שפונ' f תהיה רציפה כפונ' של שני משתנים, לכן יש את הדרישה בטענה.

לכן נוכיח שקיים פתרון רציף יחיד למשוואה 3. נעשה זאת באמצעות איטרציות פיקרד. כך נוכיח קיום של פתרון. בסוף השיעור גם נוכיח את יחידות הפתרון.

כעת נגיע לשיעור של היום.

איטרציות פיקרד

איטרציות פיקרד הן סדרה של קירובים לפתרון למשוואה שאנו מחפשים.

קירוב ראשון לפתרון:

$$\varphi_0(x) \equiv y_0$$

כעת, מציבים את הקירוב הקודם בתוך השוויון האינטגרלי, כלומר מגדירים אותו להיות:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_1(s)) ds \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds\end{aligned}$$

אלה הן איטרציות פיקרד. אנו רוצים להוכיח שהם מתכנסות לפתרון.
נזכר כי פונ' f מוגדרת במלבן D . אז תחילה עלינו להצדיק שהקירוב שלנו לא יוצא מהתחום. נעשה זאת באינדוקציה (תחילה נעשה כמה שלבים כדי להרגיש את דרך המעבר):

נתחיל מהקירוב הראשון - עבורו ברור.

עבור הקירוב השני - מתי האינטגרל בו מוגדר (כלומר מתי אנחנו לא יוצאים מהמלבן)? כאשר שני התנאים הללו מתקיימים:

$$\begin{cases} |x - x_0| \leq a \\ |\varphi_0(s) - y_0| \leq b \end{cases}$$

הקירוב פ' 1 מוגדר ל: $|x - x_0| \leq h$

ולכן התנאי הראשון מסופק. (כי h קטן מ- a עפ"י הגדרה, ועכשיו ניתן להתחיל לראות למה הגדרנו אותו בצורה כזו).

קצת פיתוחים מתמטיים לוודא שהיא גם מקיימת את התנאי השני:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\cdot) ds \\ |\varphi_1 - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds \right| \leq M \cdot |x - x_0| \leq b \end{aligned}$$

האי-שיוויון הראשון הוא מכיוון ש- M הוא חסם על הנגזרת, והאי-שיוויון השני הוא בגלל ששאנו מדברים על x בתחום $|x - x_0| \leq h$ ועל פי הגדרת h .

בסך הכל: $|x - x_0| \leq h \Rightarrow |\varphi_1 - y_0| \leq b$

כלומר הפונ' לא יוצרת מהמלבן, כלומר נמצאת בתוך המשולש ABC.

אותו דבר נעשה עבור פ' 2:

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_1(s)) ds$$

(גם כאן מגדירים זאת עבור: $|x - x_0| \leq h$, ולכן: $|x - x_0| \leq a$)
כעת (לגבי ציר y , כלומר לגבי התנאי השני):

$$|\varphi_2(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_1(s))| ds \leq M(x - x_0) \leq M \cdot h \leq b$$

גם פה אנחנו נשארים בתוך המלבן.

כעת, נעשה זאת באופן כללי: (באינדוקציה, נשאר רק המעבר)
תחילה נזכר באי השוויון המעריך אינטרגל: (הוא טריוויאלי)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \cdot \max F$$

וכעת למעבר:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - y_0| \leq M(x - x_0) \leq h \cdot M \leq b$$

לכן כל האיטרציות נשארות בתוך המלבן. (כעת ברור לחלוטין למה הגדרנו את h בצורה הזו).

טבעי להניח שאם הסדרה מתכנסת זה יהיה פתרון למשוואה שלנו.

נפרמל את הטבעיות הזו בשתי השאלות:

- האם הגבול $\varphi_n(x)$ קיים?

- האם הגבול הוא פתרון?

תחילה נפתור בעיה כללית שנעזר בה בהמשך:

נתונה סדרת הפונ' הבאה:

$$f_m(x) \in C[a, b]$$

האם הטור $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ מתכנס?

בניסוח שקול: האם עבור $S_n(x) = \sum_{m=1}^n f_m(x)$ אז $S_n(x) \xrightarrow{?} (s)$?

כדי לפתור זאת נעזר במשפט:

אם קיימת סדרת מספרים c_n כך שהטור $\sum c_n$ מתכנס ($\sum c_n < \infty$), וגם:

אז הטור $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$, $|f_m(x)| \leq c_m$ מתכנס במידה שווה.

כעת נחזור לבעיה שלנו (ונבין מה קשור טורי פונקציות):

נציג את האיטרציה ה- $n+1$ כטור:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x))$$

כלומר:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_0 + \sum_{k=0}^n (\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))$$

ועכשיו הבעיה שלנו היא האם הטור הזה מתכנס:

$$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))$$

נשים לב שעדיין לא השתמשנו בתנאי ליפשיץ, כעת ננצל אותו.
נניח לרגע ש- $X > X_0$ (כדי לא להטריח את עצמנו עם ערך מוחלט) לצד השני עושים אותו דבר.

נסה לתת הערכה לאיברי הטור:

נתחיל עם הערכה לאיבר הראשון (פי 1 פחות פי 0):

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x F(s, \varphi_0(s)) ds \right| \leq M \cdot h, \quad |\varphi_0| \leq \eta_0$$

(כיון שקטן מ/ג...)

ועבור האיבר השני:

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_0(s))] ds \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^x |F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_0(s))| ds \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \leq L \cdot \int_{x_0}^x M \cdot h ds \leq L \cdot M \cdot h (x - x_0)$$

$|f(\dots)| \leq |f(\dots)|$
~~כאן~~
 $x > x_0$
 for the first

אז זאת הערכה לפי 2 פחות פי 1.
מה לגבי פי 3 פחות פי 2?

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_2 - \varphi_1| ds \leq \overset{(\&')}{L^2 M h} \int_{x_0}^x (s - x_0) ds = L^2 M h \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

(2)

(2) זה לפי תנאי ליפשיץ ופיתוח דומה למקודם

(2) בגלל: $\int |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds = \int L M h (s - x_0) ds$ (זו ההערכה שמצאנו קודם)

בסך הכל הערכות שלנו עד כה הן:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &\leq M \cdot h \\ |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq L M h (x - x_0) \\ |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| &\leq L^2 M h \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} \end{aligned}$$

(מה זה?! למה 2 הפך ל- 2! ?)

נשים לב שבכל איטרציה מופיע עוד L ואינטרגל של $x - x_0$ בחזקה המתאימה (ולכן שמנו 2! במקום 2)

נוכיח באינדוקציה שזה נכון לכל n:
הנחת האינדוקציה:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq M h \frac{[L(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

מעבר:

(בעמוד הבא..)

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))| ds \leq \\
 &\quad |f(s, \cdot)| \leq L \cdot |\cdot| \\
 &\leq \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| ds \leq \\
 &\leq L \cdot M \cdot h \cdot L^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (s-x_0)^{n-1} ds = \\
 &= M \cdot h \cdot L^n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^n \cdot \frac{1}{n} = Mh \frac{[L(x-x_0)]^n}{n!}
 \end{aligned}$$

נשים לב שבכל איטרציה אנו מכניסים במקום x את המשתנה s (ו- x נכנס בגבול העליון).
 [זה קורה במקרה זה בשורה השלישית] בתרגילים יש לשים לב לזה ונראה זאת בהמשך.

אז בסך הכל קיבלנו את ההערכה:

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{Mh(L(x-x_0))^n}{n!}$$

אז זה תלוי ב- x ולכן לא טוב לנו עבור השימוש במשפט שהבאנו מחדו"א, לכן ניתן הערכה שהיא נכונה לכל x :

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{Mh(L \cdot h)^n}{n!} \quad (*)$$

והיא נכונה בכל הקטע כלומר: $\forall x \quad 0 \leq x - x_0 \leq h$.

כעת אנו צריכים להוכיח התכנסות של טור המספרים הזה ומזה ינבע התכנסות טור הפונקציות שלנו! (זה בדיוק המשפט שלנו מחדו"א).
 תזכורת קלה למי שכבר שכח: "טור" הפונקציות שלנו הוא:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_0 + \sum_{k=0}^n (\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))$$

ועלינו (כלומר מספיק) להוכיח התכנסות הטור (לפי (*)):

$$M_h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(Lh)^l}{l!}$$

האם הטור הזה מוכר? כן! זה של אקספוננט! וכן הוא מתכנס! למי שלא זוכר אפשר לבדוק זאת לפי כלל דל אמבר. למי שלא זוכר מה זה כלל דל אמבר שפשוט יאמין.

$$M_h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(Lh)^l}{l!} = M_h \cdot e^{Lh}$$

אז מכיוון שטור המספרים מתכנס, "טור" הפונ' שלנו מתכנס במידה שווה! וזה חשוב לנו שזה יהיה במידה שווה כי זה אומר שהטור מתכנס לפונ' רציפה! (כי איברי הטור הם רציפים)

אז בסה"כ הטור מתכנס ב- $(x_0 - h, x_0 + h)$ לפונ' גבולית רציפה:

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in C[x_0 - h, x_0 + h]$$

עכשיו עולה השאלה מה הקשר בין הפונ' הזו (פ') לבין הפתרון למשוואה שלנו? (כלומר אז מה אם פיקרד דחף כל פעם את מה שיצא באיטרציה השניה לאינטגרל של השניה, האם זה יוצא משהו שקשור לפתרון שאנו מחפשים?). אנו נרצה להוכיח שהיא פתרון. נוכיח זאת: יש לנו את השוויון

$$\varphi_n(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x F(s, \varphi_{n-1}(s)) ds \quad (\#)$$

כך ש:

$$\varphi_{n-1}(s) \rightarrow \varphi(s), \quad \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$$

לצד שמאל של המשוואה יש גבול. בצד ימין יש קבוע ואינטגרל של פונקציה (f) שרציפה בשני המשתנים שלה. אז מהרציפות של פונ' f (ההנחה שלנו כבר מההתחלה) בתור פונ' של 2 משתנים נובע ש:

$$F(s, \varphi_{n-1}(s)) \rightarrow F(s, \varphi(s))$$

ומזה נובע כי:

$$\int_{x_0}^x f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds \rightarrow \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

(אפשר לעבור לגבול בתוך האינטגרל כי פונ' f היא פונ' רציפה של שני המשתנים שלה).

לסיום מרהיב ניקח גבול משני אגפי המשוואה (#):

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

וזה מה שרצינו להוכיח!

זה נותן לנו קיום של הפתרון של המשוואה האינטגרלית, כלומר של משוואה (3) (שאמרנו שפתרון שלה שקול לפתרון עבור (1),(2)).
עוד לא סיימנו להוכיח את המשפט, נשאר לנו החלק של היחידות.

לפני כן נראה **דוגמא**:

נקח את המשוואה (עם תנאי ההתחלה):

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

זו דוגמא שאנו יודעים את הפתרון שלה, כי זו משוואה מסוג שאנו יודעים, והפתרון שלה הוא:

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \quad -\frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = \frac{1}{1-x}$$

נבנה עבודה איטרציות פיקרד:

המעבר מאיטרציה לאיטרציה נתון על ידי:

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \varphi_n^2(s) ds$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\psi_0 &\equiv 1 \\ \psi_1(x) &= 1 + \int_0^x 1^2 ds = 1 + x \\ \psi_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+s)^2 ds = 1 + \int_0^x (1+2s+s^2) ds = 1 + s + s^2 + \frac{1}{3}s^3\end{aligned}$$

נזכיר שוב, במעבר בין האיטרציות, אנו מקבלים פונקציה של x , ובאיטרציה הבאה אנו מציבים אותה באינטגרל כפונ' של s .

איזה יופי! זה באמת מתקרב לפתרון שאנו יודעים עליו:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

נסיים את המשפט על ידי כך שנוכיח יחידות של הפתרון. כמו רוב ההוכחות, נתחיל עם זה שגניח שקיימים 2 פתרונות.

אז נניח כי קיימות 2 פונ' פ' ופס" ששתיהן מהוות פתרון, כלומר:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds \\ \psi(x) &= \psi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds\end{aligned}$$

אנו נרצה להראות שההפרש בין שתיהן שווה ל-0. נוכיח תחילה שעבור אלפא מספיק קטן זה מתקיים (כלומר בתחילה נוכיח יחידות רק עבור קטע קטן, מזה אחר כך נוכל להמשיך).

$$\psi(x) \equiv \psi(x) \quad |x - x_0| < \alpha$$

נוכיח זאת (שוב נניח כי $x > x_0$ לצורכי נוחות):

$$\begin{aligned}
 |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \leq \\
 &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi(s) - \psi(s)| ds \leq \\
 &\leq L \cdot \max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi(s) - \psi(s)| \cdot \max_{x \in [x-\alpha, x+\alpha]} |x - x_0| \\
 &\leq \alpha \cdot L \cdot \max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi(s) - \psi(s)|
 \end{aligned}$$

בסה"כ:

$$\begin{aligned}
 \max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi - \psi| &\leq \alpha L \max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi - \psi| < \max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi - \psi| \\
 &\quad \nearrow \\
 &\text{נבחר } \alpha \text{ כך ש:} \\
 &\alpha L < 1
 \end{aligned}$$

ומכן נובע ש:

$$\max_{[x-\alpha, x+\alpha]} |\varphi - \psi| = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x)$$

מכיוון שאלפא תלוי רק ב- L (קבוע של תנאי ליפשיץ), אפשר ככה להתקדם ולכסות את כל הקטע. כלומר - הפונ' זהות בכל הקטע.

שאלות לתלמיד המתעניין

מה זה בדיוק הרציפות מההתחלה?
עבור הגדרת השאלה שלנו, אנו מדברים על y רציפה, כלומר נגזרת רציפה. לכן אנו צריכים ש- f תהיה רציפה עבור שני המשתנים שלה. לכן על y כפונ' של x להיות רציפה. יש גם אפשרות למצוא פתרון מוכלל (בו הנגזרת לאו דווקא רציפה), אך זה לא מהחומר של הקורס שלנו, ואנחנו לא נקבל פונ' כאלה.
למעשה מה הוכחנו זה: אם f היא רציפה של שני המשתנים אז קיים יחיד פתרון. וזה מספיק לנו כי לעולם לא נקבל f לא רציפה.

למעשה מספיק לתת ש- f רציפה לפי σ ומתקיים ליפשיץ לפי y , ומה ניתן להסיק ש- f רציפה לפי שני המשתנים (שנזכר שזה יותר חזק מאשר לפי כל אחד בנפרד)

למה פתאום יש לנו יחידות? הרי ראינו לפני 2 שיעורים דוגמאות שאין יחידות לבעית קושי? למעשה מה שנותן את היחידות זה תנאי ליפשיץ. כמו כן, היינו אמורים לבדוק אותו בדוגמא שנתנו באמצע ההוכחה.