

מד"ר 1 – תרגול 6

היום נתחיל להתעסק עם משוואות מסדר 2. יותר מדויק - היום אנו פותרים משוואות מסדר 2 שאפשר להעביר לבעיות מסדר 1. כלומר ננסה להוריד את סדר המשוואה (לא תמיד ניתן לעשות את זה).

דוגמא

נתונה המשוואה:

$$2 \cdot y \cdot y'' = (y')^2 + 1$$

מה מיוחד כאן? אין פה X . מכיוון שאין X ניתן לעשות את הדבר הבא:
למצוא פונ':

$$y' = p(y)$$

(כלומר למצוא p כמו)
נשים לב – p היא פונ' של Y !
אם יש לנו פונ' כזו נוכל להגיד על הנגזרת השניה: (ע"י שימוש בכלל השרשרת)

$$y'' = p' y' = p' p$$

אז נציב חזרה במשוואה המקורית ונקבל:

$$2 y p p' = p^2 + 1$$

במשוואה זו יש לנו Y , ו- P שהיא פונ' של Y . המשוואה שקיבלנו היא משוואה מסדר ראשון ואנחנו יודעים איך אפשר למצוא פתרון. זו משוואה פשוטה מאוד וניתן לעשות הפרדת משתנים. נעשה זאת:

$$2 y p \frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

$$\frac{2 p dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}$$

חשוב לשים לב כשאשר חילקנו הנחנו שונות מאפס:

$$p^2 + 1 \neq 0 \quad (\text{זה כמובן לא יכול להיות שווה ל-0})$$

$$y \neq 0$$

ואת זה נצטרך לחזור לבדוק בהמשך.

כעת נסכום:

$$\int \frac{2p dp}{p^2+1} = \ln(p^2+1) + C = \ln|y|$$
$$\ln(p^2+1) = \ln|y| + \ln C \quad (C > 0)$$
$$p^2+1 = C \cdot |y| = C \cdot y$$
$$p^2 = Cy - 1 \Rightarrow p = \pm \sqrt{Cy - 1}$$

אז מצאנו את P!

אז מה שקיבנו זה לא פתרון למשוואה שלנו, אלא רק שלב בדרך. כעת נמשיך כדי למצוא את Y.

כעת נשתמש בהגדרה של P:

$$y' = \pm \sqrt{Cy - 1}$$

וקיבנו בעיה מסדר ראשון. נפתור אותה:

$$\pm dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy - 1}} \Rightarrow \pm x = \int \frac{dy}{\sqrt{Cy - 1}} = \frac{2\sqrt{Cy - 1}}{C} + D$$
$$\pm x = \frac{2\sqrt{Cy - 1}}{C} + D$$

נשים לב שיש לנו שני קבועים שרירותיים. נזכר שוב שאם המשוואה היא מסדר 2 אז יש 2 קבועים שרירותיים בדיוק (וזה נכון לכל סדר של משוואה - לסדר n יש n קבועים שרירותיים). נבודד את Y:

$$\pm Cx = 2\sqrt{Cy - 1} + D \quad (D \neq \bar{D})$$
$$2\sqrt{Cy - 1} = \pm Cx - \bar{D}$$

(המשך עמוד הבא)

$$y(Cy-1) = (\pm Cx - \bar{D})^2$$

$$y = \frac{1}{C} \left[\frac{(\pm Cx - \bar{D})}{y} + 1 \right]$$

כדי לבדוק האם זה פתרון, אפשר לחשב את הנגזרת ולהציב במשוואה הראשונה. נשים לב שאי אפשר להפטר מה- פלוס/מינוס כי C נמצא גם לבד [בסימן חיובי (במכנה החיצוני)].

אז עכשיו נזכר בתנאי שלנו מההתחלה כשחילקנו $Y=0$. אם זה קורה (הצבה במשוואה מקורית):

$$2 \cdot 0 \cdot 0'' = (0')^2 + 1 \Rightarrow 0 = 1$$

אז זה לא יכול לקרות... (כלומר זה לא יכול להיות פתרון)

תרגיל נוסף

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$$

כאן נשים לב שחסר Y . ולכן גם כאן נוכל לעשות כל מיני דברים.

כלל: תמיד אם אין X אז צריך להשתמש בשיטה הקודמת, אם אין Y אז בשיטה שיש עכשיו.

אז נסמן:

$$v = y'$$

אבל הפעם (כי לכאורה זה כמו השיטה מהתרגיל הקודם):

$$v(x) = y'$$

כלומר V הוא פונ' של X . מקבלים:

$$x^2 v' + 2xv - 1 = 0$$

$$x^2 v' + 2xv = 1$$

וקיבלנו משוואה לינארית מסדר ראשון.

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$x^2 v' + 2xv = 0$$

פתרון:

$$x^2 \frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2 \frac{dx}{x} \quad (v \neq 0)$$

$$\ln |v| = -2 \ln |x| + \ln C$$

$$v = C \cdot x^{-2} = \frac{C}{x^2}$$

נזכור שב- x "מותר" לחלק כיוון שנוכל פשוט אחרי זה להתחייס לתחום אחד שלא מכיל אותו כתחום של הפתרון).

אז קיבלנו פתרון. אך זה לא הפתרון לפי Y וזה אפילו לא הפתרון של המשוואה הלינארית כי זה פתרון רק להומוגנית... בקיצור נמשיך:

לפי השיטה הראשונה לפתרון משוואה לינארית, נתחייס ל- C כפונ' של x :

$$v(x) = \frac{C(x)}{x^2}$$

אז:

$$v'(x) = \frac{C'x^2 - 2Cx}{x^4} = \frac{C'x - 2C}{x^3}$$

נציב במשוואה שלא-הומוגנית:

$$x^2 \frac{C'x - 2C}{x^3} + 2x \frac{C}{x^2} = 1$$

$$C' - \frac{2C}{x} + \frac{2C}{x} = 1$$

↓ ↓
אנו דבר

(כי בחרנו משוואה הומוגנית)

נכון, אם C קבוע זה פתרון

למשוואה ההומוגנית)

אז:

$$C' = 1 \Rightarrow C = X + D$$

בסך הכל:

$$V = \frac{X+D}{X^2} = \frac{1}{X} + \frac{D}{X^2} = Y'$$

ונזכר שמה שקיבלנו כאן זה בעצם הנגזרת של Y .
לפתור מכאן זה מאוד פשוט, רק צריך לעשות אינטגרל:

$$Y = \int \left(\frac{1}{X} + \frac{D}{X^2} \right) dx = \ln X - \frac{D}{X} + E$$

שוב נשים לב שיש לנו כאן שני קבועים שרירותיים (E ו- D).

ולבדיקת התנאי שהגיע מהחלוקה – $V=0$: נציב במשוואה המקורית ונראה שלא יכול כי הוא מקיים את המשוואה המקורית.

תרגיל נוסף 2

נתונה המשוואה:

$$Y'' + X(Y')^2 = 0$$

זו היא משוואה פשוטה. נשים לב שאין לנו בה Y . לכן נעשה מה שעשינו בתרגיל הקודם.
שוב נגדיר:

$$V(X) = Y'$$

(ושוב נשים לב ש- V הוא פונ' של X !)

נציג במשוואה המקורית ונמצא את V (נשים לב שחילקנו ב- $V=Y'$, נבדוק את זה אחרי זה):

$$V' + X V^2 = 0$$

$$\frac{dV}{dX} = -X V^2 \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = -X dX \Rightarrow -\frac{1}{V} = -\frac{X^2}{2} + C$$

$$V = \frac{2}{X^2 + D}$$

אז קיבלנו את V , ועכשיו עלינו למצוא את Y :

$$y = \int \frac{2dx}{x^2 + c} = \dots \quad (1) \quad c > 0: \quad y = \frac{2}{c} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{c} + 1} = \frac{2}{c} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1} =$$

$$= 2 \frac{\sqrt{c}}{c} \int \frac{d\frac{x}{\sqrt{c}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}} + D$$

$$(2) \quad c < 0: \quad c \stackrel{(\infty)}{=} -a^2$$

$$y = \int \frac{2dx}{x^2 - a^2} = 2 \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} =$$

$$= \frac{2}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx =$$

$$= \frac{1}{a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] + D =$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + D = \quad (a = \sqrt{-c})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-c}}{x + \sqrt{-c}} \right| + D$$

$$(3) \quad c = 0: \quad y = \int \frac{2}{x^2} dx = -\frac{2}{x} + D$$

כעת לגבי $V=0$ - זה גם פתרון (נציב במשוואה המקורית) שהוא Y שווה למספר קבוע. לכן נוסיף את הפתרון:

$$(4) \quad y = D$$

מה שבעיקר למדנו מהתרגיל הזה, שכדאי לעשות קצת חזרה על אינטרגלים...