

23.3.09

מד"ר 1- שיעור 7

היום נמשיך עם מה שעשינו שיעור שעבר - תיאוריה של בעיה קושי של משוואה מסדר ראשון (כלומר עם נגזרת ראשונה בלבד, לא סדר גבוה יותר). בעיה קושי הכוונה שזו בעית התחלה.

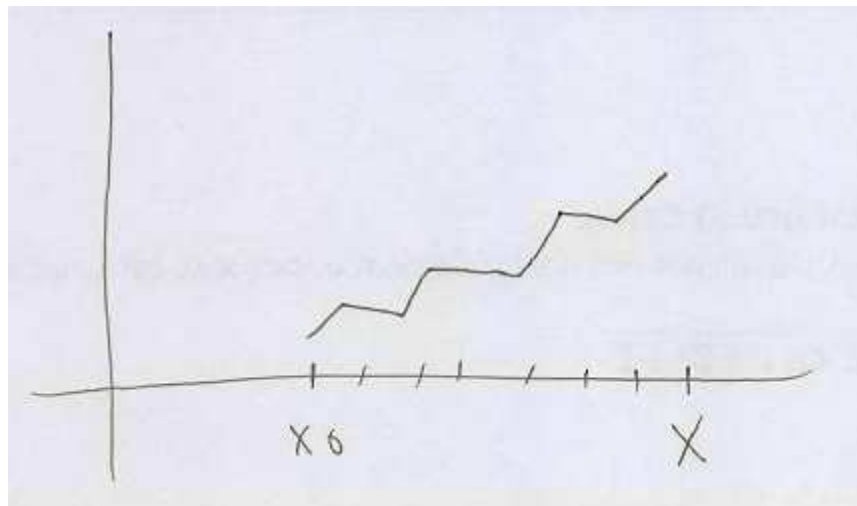
נגדיר מחדש:

בעית קושי היא הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} (1) & y' = f(x, y) \\ (2) & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(ההנחה היא כמובן שהפונ' y היא גזירה ורציפה [יש לנו נגזרת בנתון...])

נזכר מה שעשינו בשיעור הקודם, מנקודת ההתחלה לכיוון x כלשהוא חילקנו את הקטע לקטעים, ואז התקדמנו לפי שדה הכיוונים (שנתון על ידי f):



לבסוף השאפנו את מספר החלקים לאינסוף וניתן להוכיח כי לסדרת הפונקציות שקיבלנו יש תת סדרה שמתכנסת במ"ש. (בעזרת שיטת אוילר ניתן להוכיח קיום אך לא יחידות).

נגדיר מושג: בעיה מוצגת היטב היא בעיה שיש פתרון כך ש:

1. קיום – הפתרון קיים
2. יחידות – הפתרון יחיד ומיוחד
3. יציבות - אם משנים מעט את תנאי ההתחלה, הפתרון משתנה מעט (או תלות רציפה בתנאי התחלה במקרה זה)

משפט קיום יחידות לבעיה (1) (2) [בעית קושי]:

נניח ש- f היא:

1. רציפה בתחום:

$$\{ |y - y_0| \leq b, |x - x_0| \leq a \} : D \quad \text{תחום (רצף)}$$

2. f מקיימת תנאי ליפשיץ לפי y :

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$\nwarrow \quad \uparrow$
 $x \text{ נקב}$

אז קיים פתרון והוא יחיד עבור (1), (2) פי של x , עבור:

$$|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_D |f|$$

הערה:

אם f גזירה לפי y בתחום והיא חסומה בתחום D , אז:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y} (x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)) \cdot (y_2 - y_1)$$

$\uparrow$
 נגזרת לפי y

בערך מוחלט:

$$| \dots | = | \dots | \leq M |y_1 - y_2|$$

(כלומר מתקיים תנאי ליפשיץ, אך הוא יותר חזק מתנאי המשפט הזה, לדוגמא הפונ':

$$f(x, y) = x \cdot |y|$$

עבור כל D חסום היא מקיימת את תנאי ליפשיץ:

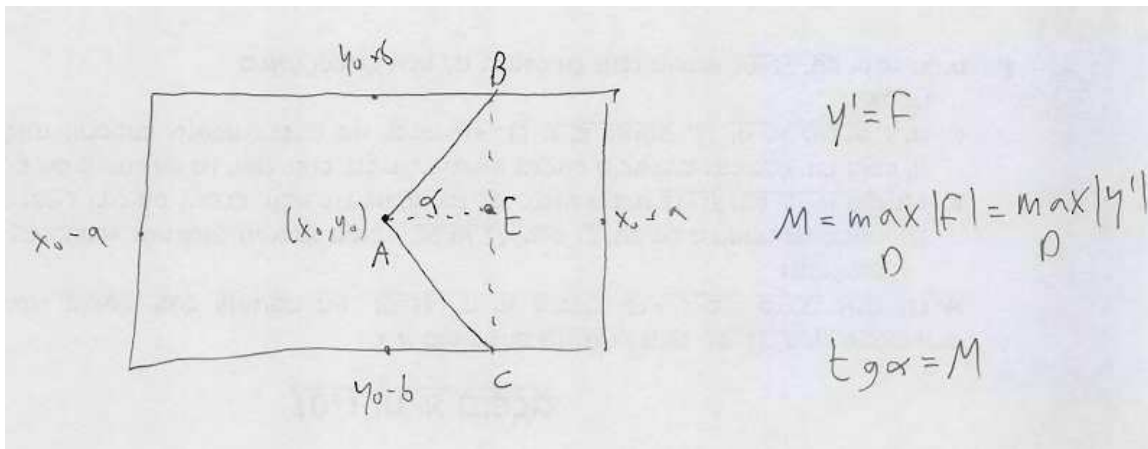
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x(y_1 - y_2)| \leq |x| \cdot |y_1 - y_2|$$

אבל היא לא גזירה ב- y שווה 0

נוכיח כעת את המשפט:

נתחיל עם דיון קצר לגבי התחום עליו אנו מדברים.

אנו מתסכלים על התחום:



הקו האינטגרלי (הפתרון למשוואה) לא יוצא מהזווית (כלומר מהמשולש ABC), כי יש חסם על הנגזרת שלו.

$$AE = h$$

אז ראינו איפה M מופיע בפתרון, איפה מופיע h ?

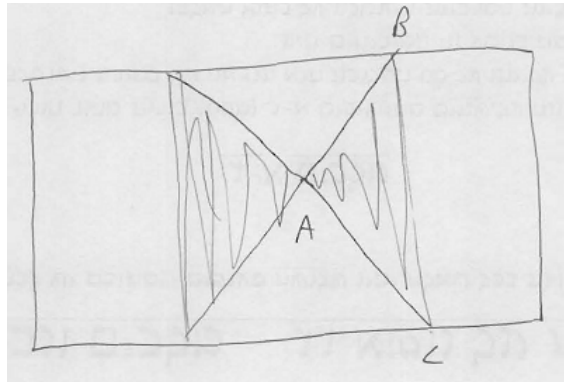
למה? כי:

$$h = \frac{b}{M} \Rightarrow \frac{b}{h} = \operatorname{tg} \alpha = M$$

כלומר המשפט אומר שקיים פתרון לפחות עד ל- h . (יכול להיות שקיים גם באיזורים יותר ימיניים, ויכול להיות שלא, דוגמא, המשוואה: $y' = M$, הפתרון לא עובר את h . המשפט בכל מקרה מבטיח עד h).

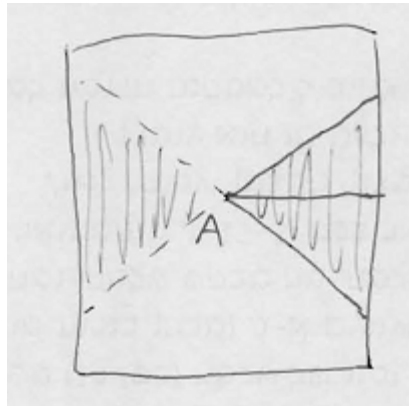
טוב.. לא לגמרי נכון מה שאמרנו עד כה, שני דברים לתיקון:

1. כל הזמן דיברנו על ערך מוחלט, אז למעשה הפתרון יכול להימצא בתחום הזה:



(כלומר הוא יכול להיות גם במשולש מהצד השני)

2. h הוא מינימום בין זה (זה b/M , מה שהנחנו עד כה שהוא שווה לו) לבין a , אז הפתרון יכול להיות פחות [כלומר לתחום x -ים אפילו קטן יותר] למשל במקרה הזה (כאן a הוא הקטן):



וכעת, להוכחה:

נכתוב משוואה אינטגרלית במקום משוואה דיפרנציאלית (ונוכיח עליה, כי זה יותר קל).

טענה

פ' של x ($\psi(x)$) הוא פתרון ל- (1), (2) אם ורק אם הוא פתרון למשוואה (האינטגרלית):

$$(3) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(s, y(s)) ds$$

(נשים לב שפה הפונ' שאנו מחפשים נמצאת בשני הצדדים של השוויון).

הוכחת טענה

כיוון ראשון:

נניח שפי' של x הוא פתרון עבור (1),(2), כלומר:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= F(x, \varphi'(x)) \\ \varphi(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה למשוואה מ- x_0 :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x \varphi'(s) ds &= \int_{x_0}^x F(s, \varphi(s)) ds \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \int_{x_0}^x F(s, \varphi(s)) ds \\ \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x F(s, \varphi(s)) ds\end{aligned}$$

וקיבלנו את מה שרצינו.

בכיוון ההפוך:

נניח שפי' פתרון משוואה אינטגרלית (3), כלומר:

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(s, \varphi(s)) ds$$

צריך להוכיח שזה מקיים המשוואה הדיפרנציאלית (1) ואת תנאי התחלה (2).
עבור תנאי התחלה:

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(s, \varphi(s)) ds = y_0$$

" 0

עבור המשוואה הדיפרנציאלית נגזור את השוויון (צד ימין גזיר [כי זה אינטגרל] ולכן גם צד שמאל גזיר):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

את הוכחת המשפט נעשה כבר בשיעור הבא.