

מד"ר 1 - שיעור 12

בשיעור שעבר התעסקנו עם משפט שעוד לא סיימנו להוכיח. נסיים לעשות את זה כעת.

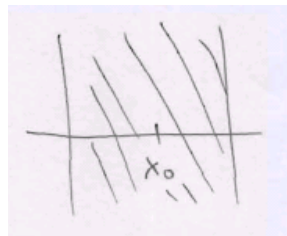
אז אנו מדברים על בעיית קושי:

$$(1) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

למדנו כמה שיטות לפתור משוואות מסוימות מהסוג הזה, אבל אין נוסחה כללית לפתרון כללי לבעיית קושי (אין אפילו נוסחה עם אינטרגלים שהם לא דווקא פתירים).

$$S: |x - x_0| \leq a$$

אז במשפט הנוכחי אנו מסתכלים על הפס:
שרטוט:



אנו מניחים ש- f היא פונ' רציפה בפס, ומקיימת את תנאי ליפשיץ:

$$f(x, y) \in C$$

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq L \cdot |\Delta y|$$

ו- L זה אותו L לכל הפס (הוא אינו תלוי ב- y ! הוא יכול להיות תלוי ב- x).

בעזרת איטרציות פיקרד אנו מוכיחים כי קיים פתרון. לאחר מכן נוכיח יחידות.

משפט (זה ההוא משיעור שעבר)

קיים פתרון לבעיה (1) עבור $\forall x, |x-x_0| \leq a$ (כלומר עד השפה של הפס קיים הפתרון).

במשפט הראשון הוכחנו באותה שיטה קיום פתרון לוקלי. במשפט הראשון תחום הקיום היה עד h (שהוא היא מינ' בין a ובין b/M) - כאן זה עד a תמיד!

המשפט הזה הוא משפט גלובלי, כלומר איפה שהפונ' נתונה - קיים פתרון לאותם ה- x 'ים. קודם הייתה לנו הגבלה, כלומר הפתרון יכל להיות קטן יותר מ- a (היה יכול להיות רק עד b/M).

קיום

אז אנחנו בונים איטרציות פירקד (לפני כן מעבירים למשוואה אינטרגלית) ומוכיחים קיום. בסוף השיעור הגענו ל:

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_0 + \sum_{l=0}^k (\varphi_{l+1} - \varphi_l)$$

(כלומר הסכום החלקי של הטור $\varphi_0 + \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_{l+1} - \varphi_l)$ זה איטרציות הפירקד שלנו)

הטענה שלנו היא שהטור $\varphi_0 + \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_{l+1} - \varphi_l)$ מתכנס במידה שווה בקטע $|x-x_0| \leq a$ ואז יש התכנסות $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ במ"ש ופי' היא רציפה ($\varphi(x) \in C$)

כמו כן, הפונ' הגבולית היא פתרון. מיד נראה זאת. לפני כן נשאל את זה.

שאלה: האם פי של x הוא פתרון לבעיה (1) - לבעיית קושי?

כבר דיברנו בעבר שפתרון לבעיית קושי שקול לפתרון לבעיה:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

(במקום 2 שוויונות יש לנו כאן רק שכולל את שניהם).

כעת נוכיח שהפונ' הגבולית מקיימת את המשוואה האינטרגלית. אז יש לנו את זה:

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_k(s)) ds$$

והשאלה היא האם יש נביעה כזו:

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_k(s)) ds \quad \xrightarrow{?} \quad \varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(x)) ds$$

כלומר השאלה היא האם אפשר לעבור לגבול? האם מותר לעבור לגבול - כלומר האם מזה שזה נכון נובע שגם בגבול זה נכון. התשובה היא כן. על סמך מה? מיד נראה.

בצד שמאל פי $K+1$ מתכנס לפי של X . השאלה היא מה הגבול בצד ימין. אז Y_0 מתכנס לעצמו ואנו מקווים שהאיבר השני בצד ימין מתכנס בהתאם:

$$\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi_k(s)) ds$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$?
 $\psi(x)$ y_0 $\int_{x_0}^x f(s, \psi(x)) ds$

כלומר השאלה שנשארת היא האם:

$$\int_{x_0}^x f(s, \psi_k(s)) ds \xrightarrow{?} \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds$$

אנו היינו יודעים ש- f היא פונ' רציפה במידה שווה אם היה לנו קטע קומפקטי (כי פונ' רציפה בקטע קומפקטי היא רציפה במ"ש).

אבל תחום שלנו הוא לא קומפקטי. קודם היה מלבן עם שפה אז היה אפשרי - פה אין לנו (אנו מדברים במשפט הזה, בניגוד לקודם - על פס ולא מלבן). בגלל שפי של x הוא חסום אפשר לחסום את התחום באופן מלאכותי (כלומר להראות שלא באמת "מנצלים" את זה ש- y לא חסום, כלומר הפונ' חסומה). אנחנו נעשה זאת בדרך אחרת - בעזרת תנאי ליפשיץ.

נסתכל על:

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, \psi_k(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds \right| \leq \underbrace{\left| L \cdot \int_{x_0}^x |\psi - \psi_k| ds \right|}_{\text{פירוק}} \leq L \cdot a \cdot \max_{|x-x_0| \leq a} |\psi - \psi_k| \rightarrow 0$$

זה שואף לאפס כי פי k מתכנס לפי במידה שווה (שימו לב! המידה שווה חשובה כאן. ודאו שאתם מבינים למה).

$$\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi_k(s)) ds$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\psi(x)$ y_0 $\int_{x_0}^x f(s, \psi(x)) ds$

אז כעת אפשר להוריד את סימן השאלה:

וזה מה שרצינו להראות!

בסך הכל:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

וזה (פי של X) פתרון למשוואה אינטרגלית ולכן פי הוא פתרון לבעית הקושי.

נשים לב ש- L יכול להיות תלוי ב- X , ולדוגמא לעלות איתו, למשל המשוואה:

$$y' = x^2 y$$

L בוודאי תלוי ב- x (איקס גדול גורר L גדול). ועדיין יש לנו פתרון לכל X .

והפתרון הוא:

$$y = C \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

הוא פתרון עולה וקבוע ליפשיץ פה תלוי ב- x , ועולה איתו. בכל פס חסום, קבוע ליפשיץ חסום.

אם מתעקשים לראות אותו בדיוק, קבוע ליפשיץ כאן שווה ל- X בריבוע כי:

$$|x^2(y+\Delta y) - x^2 y| = |x^2 \Delta y| \leq L \cdot |\Delta y|$$

השאלה איתה התעסקנו קודם - היחידות. האם הפתרון הוא יחיד?

זה כבר לא קשור לאיטרציות פירקד, אך עדיין אנו משתשמים בזהות האינטרגלית. נזכר בהגדרה של בעיה מוצגת היטב (פתרון קיים, יחיד, יציב). נזכרנו.

אז כעת אנו מדברים על יחידות.

יחידות

השאלה היא האם קיים רק פתרון אחד? האם קיים פתרון יחיד לבעיה (1)?

נניח שקיימים 2 פתרונות, שלא שווים באופן זהותי: $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$ עבור $|x - x_0| \leq a$.

נתסכל על x כך ש: $|x - x_0| \leq h$ (בינתיים הוא כללי כזה. נקבע אותו בסוף ההוכחה)

נתסכל על ההפרש ביניהם:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^x [F(s, \varphi(s)) - F(s, \psi(s))] ds \right| \leq$$

$\uparrow$ אולי תנאי גבול
 $\uparrow$ פונקציה

$$\leq L \cdot h \cdot \max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi - \psi|$$

זה נכון לכל x בתחום $|x-x_0| \leq h$:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq L \cdot h \cdot \max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi - \psi|$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{max} = m}$

בפרט הוא מתקיים גם בנקודת המקסימום. נסמן ב- $\hat{x}$ את נקודת המקסימום, כלומר:

$$|\varphi(\hat{x}) - \psi(\hat{x})| = \max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi - \psi| = m$$

כעת:

$$|\varphi(\hat{x}) - \psi(\hat{x})| \leq L \cdot h \cdot \max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi - \psi|$$

$$m \leq L \cdot h \cdot m$$

כעת אנו נבחר את h . עד עכשיו הוא היה מספר שהוא פשוט קטן או שווה ל- a . אז נבחר מספר h כך שמתקיים: $Lh < 1$ לדוגמא, ניתן לקחת: $h = \frac{1}{2L}$.

ואז אנו מקבלים:

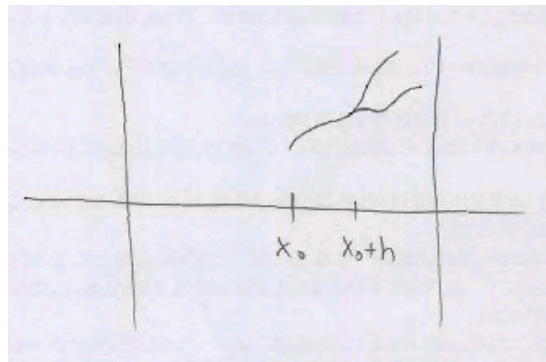
$$m \leq \frac{1}{2} m$$

וזו סתירה! טוב, לא בדיוק סתירה - זה אומר ש- $m=0$.

אז מה עשינו בעצם? עשינו הערכה באמצעות שוויון אינגרלי וקיבלנו הערכה של משהו שבצד שמאל, עם אותו מספר עצמו כפול משהו שהוא קטן מאחד. זה טריק שחוזר על עצמו הרבה במד"ר.

ההנחה שלנו (בשלילה) ששני הפתרונות אינם שווים זהותית (בכל התחום המדובר, כלומר עד a).
עדיין לא הוכחנו שזה לא נכון, אבל הוכחנו ש- $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ בתחום $|x - x_0| \leq h$.

כלומר עלול (לכאורה) להיות מצב כזה:



כלומר עוד לא הגענו לסוף ההוכחה - אנו רוצים ששני הפתרונות יהיו שווים בכל הפס.
כלומר ה- h שבחרנו היה צריך לענות לשני תנאים:

$$\begin{cases} h \leq a \\ h < \frac{1}{L} \end{cases}$$

ולכן הוא עלול לקיים: $h < a$ (נגיד אם L מספיק גדול).

על מנת להמשיך לכל הפס, ניקח: $x_1 = x_0 + h$

(נשים לב ש- h אינו תלוי ב- x_0 , אלא רק ב- L).

נגדיר את בעית הקושי:

$$\begin{cases} y' = F \\ y(x_1) = \varphi(x_1) = \psi(x_1) \end{cases}$$

לבעיה זו קיים פתרון יחיד עבור: $|x - x_1| \leq h$

ונשים לב שזה הוא אותו h כי L לא השתנה! (כי בעיה זו מוגדרת עם אותו f). אז כעת הפתרונות שווים זהותית בתחום:

$$x_0 \leq x \leq x_1 + h = x_0 + 2h$$

בצורה כזו, תוך מספר סופי של צעדים, מגיעים ל- a .
צריך כמובן לעשות את זה לכיוון שמאלה - של השלילים כלומר להגדיר

$$\hat{x}_1 = x_0 - h, \hat{x}_2 = x_1 - h, \dots$$

עד שמגיעים לנקודה $x_0 - a$.

וזה הוא סוף הוכחת היחידות.

מסקנה מהמשפט

נניח שלכל x_0 ו- a הפונ' $f(x, y)$ רציפה בפס $|x - x_0| \leq a$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ עם L ,

(שיכול להיות תלוי בהם, כלומר: $L = L(x_0, a)$) אז פתרון לבעית קושי (1):

$$(1) \begin{cases} y' = F \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

לכל $\mathbb{R}$ והוא יחיד.

מקרה פרטי של זה זה משוואות לינאריות.

דוגמא

$$y' = x^2 y$$

(זו משוואה לינארית!)

נקח איזה שהם x_0 ו- a . למה שווה קבוע ליפשיץ - L במקרה זה?

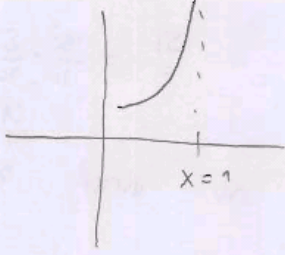
כבר קודם בשיעור מצאנו ש:

$$L = \max_{|X - X_0| \leq a} X^2$$

עוד דוגמא

$$y' = y^2$$
$$y(0) = 1$$

אז מה הפתרון לבעיה זו:

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \Rightarrow y = \frac{1}{1-x}$$


הפתרון לא קיים עבור כל x , כלומר לא ניתן להמשיך אותו. הפתרון "מתפוצץ" ב- $x=1$.

וכעת לנושא חדש!

משוואות מסדר גבוה יותר

אנחנו נשתמש כאן לעיתים בשיטת איטרציות פיקרד, ונגיד הרבה פעמים שזה כמו שכבר הוכחנו. בגלל זה השיעור עשינו שוב את הכל התהליך עם כל הפרטים.

נסתכל על המשוואה:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

זו היא משוואה מפורשת מסדר n .

ניתן גם לתת את זה בצורה לא מפורשת (כלומר לא פתור עבור הנגזרת מסדר n):

$$\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ואז צריך להשתמש במשפט הפונ' הסתומה (אם התנאים מאפשרים).

למדנו כל מיני תיאוריות של שיטות מיוחדות לפתרון משוואות מסדר ראשון. למצוא פתרון בצורה מפורשת למשוואות מסדר n בדרך כלל לא נעשה.

משוואה לינארית מסדר שני

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

למשוואה מסדר ראשון אפשר למצוא נוסחא (זה לא אומר שאנו יודעים לפתור את האינטגרלים בנוסחת הפתרון, אבל כן יש לנו נוסחא של הפתרון)

הוכח שאין נוסחא כללית שנותנת פתרון למשוואה לינארית מסדר שני (בניגוד למשוואה לינארית מסדר ראשון). ניתן להעביר אותה למשוואת ריקטי [עשינו בתרגיל 4] (אך גם לה כמובן אין נוסחא כללית).

אז כמה דוגמאות למשוואות מסדר 2, שאפשר לפתור: (למעשה דוגמאות של סוגים של משוואות)

בכל המשוואות הרעיון הוא שחסר אחד מהנעלמים, או x או y או y' :

1.

$$y'' = f(x)$$

(כאן למשל חסר גם y וגם y')

איך פותרים? עושים אינטגרציה ואז עוד אחת! כלומר הפתרון הכללי:

$$y' = \int f(x) dx + c = F + c$$

$$y = \int F dx + c_1 x + c_2$$

ההבדל המיידי שאנו רואים זה שיש לנו 2 קבועים. וזה תמיד יקרה - פתרון כללי של משוואה מסדר שני תכיל 2 קבועים שרירותיים.

2.

$$y'' = F(x, y')$$

(במשוואה זו חסר y)

$$u' = f(x, u)$$

נסמן: $u = y'$, וכעת:

אהה! אותה משוואה עם נגזרת אחת פחות! זה נקרא הורדת סדר.

לא אומר שאפשר לפתור את זה בצורה כללית, אבל אנו יודעים לפתור לכמה מקרים.

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$$

אם מוצאים פתרון $u = \varphi(x, c_1)$ אז הפתרון ל- y הוא:

שוב פתרון כללי מכיל 2 קבועים שרירותיים (בדיוק! לא פחות ולא יותר!)

$$y'' = F(y, y')$$

3. פונ' f לא תלויה ב- x : (כאן אין משתנה x):

המעבר כאן הוא פחות טריוויאלי מהקודם.

לוקחים y כמשתנה חדש (רוצים להפטר מ- x לגמרי - לכתוב משוואה שלא יהיה בה x בכלל, משוואה של y) ומסמנים: $y' = p(y)$, כלומר: $\frac{dy}{dx} = p(y)$. (כלומר מחפשים y כפונ' של y)

כעת המשוואה הופכת להיות:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F(y, p)$$

(עדיין יש לנו x , במכנה של הצד השמאלי - עוד מעט נפטר ממנו).

השאלה היא למה שווה נגזרת שניה של y לפי x במשתנים החדשים? נכתוב את זה כך:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(p(y(x)) \right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'$$

(נציג את הרכבה)

y	כונן	p
x	כונן	y

$$p \cdot p' = F(y, p) \quad (*)$$

אז המשוואה הופכת להיות:

וזו משוואה מסדר ראשון!

אם מצליחים לפתור את המשוואה הזו, צריך למצוא אחרי זה את y כפונ' של x , כלומר נקבל:

$$\frac{dy}{dx} = p(y)$$

כשפותרים את (*) מקבלים קבוע שרירותי אחד, וכשפתורים את זה מקבלים את השני!

אין כמו דוגמא! (אז נעשה אחת)

$$y'' = \sin y$$

המשוואה הנתונה:

$$p(y) = \frac{dy}{dx}$$

מסמנים את y כמשתנה חדש ו:

כעת: (נעשה את זה שוב, רק כדי להראות שזה פשוט ולא צריך לזכור על פה)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[p(y(x)) \right] = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$p \cdot p' = \sin y$$

ולכן:

איך פותרים את המשוואה הזו? הפרדת משתנים!

נזכור שאין לנו כאן X . אנו עושים אינטגרציה לפי Y .

המשתנים למעשה כבר מופרדים אז נעשה ישר אינטגרציה:

$$\frac{p^2}{2} = \int \sin y dy + C = -\cos y + C$$

זה עוד לא פתרון, צריך לחזור ל- X :

$$\frac{(y')^2}{2} = C - \cos y$$

נפריד משתנים, טוב למעשה שוב הם כבר מופרדים, אבל נעשה כמה מניפולציות אלגבריות כדי שיהיה נוח:

$$y' = \pm \sqrt{2C - 2\cos y}$$

נשים לב שיש לנו קבוע שרירותי אחד וכעת לאחר האינטגרציה יצטרף אליו חברו השני:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2C - 2\cos y}} = C_1 \pm X$$

וזה הוא פתרון בצורה אינטרגלית. הפתרון סתום וגם אינטרגציה אנחנו לא מסוגלים לבצע פה.

שוב נעזר במבט על מנת לראות שיש לנו שני קבועים שרירותיים (C ו- C_1).

את המשוואה הזו ספיציפית היה אפשר לפתור בדרך אחרת: נכפיל ב- y' .

$$y' \cdot y'' = \sin y \cdot y'$$

ואז:

$$\frac{[(y')^2]'}{2} = \sin y \cdot y' = -(\cos y)'$$

ועכשיו הגענו למשוואה יותר בקלות ממקודם.

$$y'' = f(y)$$

את זה ניתן לעשות כאשר יש לנו משוואה מהצורה: