

מד"ר 1 - שיעור 19

בשיעור שעבר למדנו את עיקרון המקסימום עבור המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

כאשר $a > 0$ ו- $c < 0$.

a חיובי זה לא משמעותי כי תמיד אפשר להכפיל משוואה ב-1.

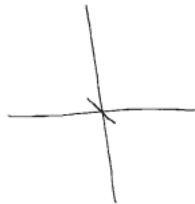
עקרון המקסימום: בתוך הקטע (α, β) אין מקסימום חיובי ואין מינימום שלילי. בלי לפתור את המשוואה אפשר לדעת דברים על התנהגות הפתרון. זה טוב לנו למשל כאשר יש מקדמים לא קבועים (שם אנחנו לא יודעים לפתור את המשוואה).

דוגמא 1

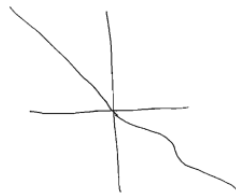
נסתכל על בעית קושי:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

אנחנו יודעים לפתור את זה (מציבים e^{rx} ולפי השורש של הפולינום האופייני מוצאים 2 פתרונות ואז פתרון כללי). מה אפשר להגיד על הפתרון? לפי תנאי ההתחלה הפתרון נראה כך סביב הנקודה 0:



האם יכול להיות שהוא משנה את הכיוון באיזור השלילי? ובחיובי? לא כי אז זה מיני שלילי או מקסי חיובי. לכן בלי למצוא אותו, אנחנו יודעים שהפתרון הוא מונו' יורד:

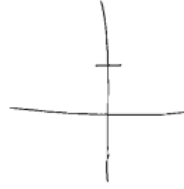


דוגמא 2

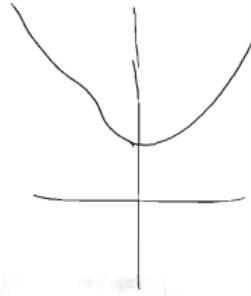
אותה משוואה עם תנאי התחלה אחר:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

איך הפתרון מתנהג? מתנאי ההתחלה:



אז אנחנו יודעים שזו היא נקודות מינימום (כי אין מקסימום חיובי). נוודא זאת - מהמשוואה נובע (הצבה של תנאי ההתחלה) כי: $y'' = 2$. ולכן זו היא נקודת מינימום ואז הפתרון נראה בצורה כזו:



והוא לא יכול לשנות כיוון אחרי זה (כלומר לכיוון אחד תמיד עולה וכך גם לשני).

מהחקירה הזו נובע כי משוואות מסוג זה (כלומר בעלות $c < 0$), אין בהם תנודות של הפתרון (כי יש לנו מקסימום או מינימום לכל היותר פעם אחת, בו הפתרון יכול לשנות רק פעם אחת את הכיוון).

נעבור למשוואות לא הומוגניות.

משוואות מסדר שני עם מקדמים קבועים לא הומוגניות

אז האופרטור שלנו L הוא עדיין אותו אחד מההומוגניות. והמשוואה שלנו היא: $Ly = f$.

האופרטור הוא לינארי. נניח כי יש לנו 2 פתרונות y_{p1}, y_{p2} (כלומר $Ly_{p1} = f$ ו- $Ly_{p2} = f$). נבדוק מה עם הפרש ביניהם:

$$L(y_{p1} - y_{p2}) = Ly_{p1} - Ly_{p2} = f - f = 0$$

מסקנה 1: הפרש בין 2 פתרונות למשוואה לא הומוגנית היא פתרון למשוואה הומוגנית.

מסקנה 2: פתרון כללי למשוואה לא הומוגנית היא: $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$.

כאשר y_p - פתרון פרטי, y_1, y_2 - מערכת בסיסית למשוואה הומוגנית. זאת אומרת שכל פתרון למשוואה לא הומוגנית זה סכום של איזה שהוא פתרון פרטי ופתרון כללי למשוואה ההומוגנית (נובע מסקנה 1)

מסקנה 3: כדי למצוא פתרון כללי למשוואה $Ly = f$ צריך למצוא בסיס למשוואה הומוגנית $Ly = 0$ ופתרון פרטי y_p (אחד, איזה שהוא) למשוואה $Ly_p = f$. לאחר מכן הפתרון הכללי הוא לפי מסקנה 2.

דוגמא

נתסכל על המשוואה

$$y'' - y = 1$$

איך למצוא פתרון כללי למשוואה זו?

פותרים משוואה הומוגנית: הפתרון הוא לא אחר מאשר $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

ופתרון פרטי: 1- (ניתן לבדוק).

לכן הפתרון הכללי למשוואה הוא:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1$$

איך מצאנו את הפתרון הפרטי?

אז עוד מעט נלמד את הדרך הכללית, בינתיים נראה דרך מסויימת.

מציאת פתרון פרטי למשוואה לינארית מסדר שני לפי הסוג של f

למשל יש לנו את:

$$y'' - y = e^{\alpha x}$$

אחת הדרכים, אם אגף ימין הוא פונ' מעריכית או טריגונומטרית או פולינום אז אפשר לחפש פתרון באותה צורה כמו אגף ימין. השאלה היא האם קיים פתרון פרטי שיש לו את אותה הצורה.

כאן נחפש פתרון מהצורה: $y_p = A \cdot e^{\alpha x}$.

למה מחפשים פתרון מאותה הצורה? כי הנגזרת של הפונקציות האלו שומרות על הצורה של הפונ' (נגזרת של פולי' זה פולי', נגזרת של מעריכי זה מעריכי וכו').

נציב במשוואה:

$$A \alpha^2 e^{\alpha x} - A e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

וכעת נקבל:

$$A(\alpha^2 - 1) = 1 \quad \alpha \neq 1$$

$$A = \frac{1}{\alpha^2 - 1}$$

ולכן (נזכר שמספיק למצוא איזה שהוא פתרון פרטי אחד):

$$y_p = \frac{1}{\alpha^2 - 1} e^{\alpha x}$$

והפתרון הכללי למשוואה הלא – הומוגנית:

$$y = \frac{1}{\alpha^2 - 1} e^{\alpha x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

אי אפשר לעשות את זה אם אלפא שווה ל-1. מה עושים במקרה שאלפא שווה ל-1. האם זו הפתעה

שבמקרה זה שאין פתרון מהצורה $A \cdot e^{\alpha x}$? בלי לעשות חישוב - האם זה יכול להיות? לא.

כי $A \cdot e^{\alpha x}$ הוא גם הנזגרת השנייה של עצמו ולכן הוא פתרון למשוואה ההומוגנית.
אז צריך לעשות משהו אחר. לא נעשה את זה עכשיו (נראה את זה בשיעור הבא)

אז השיטה הזו עובדת עבור הפונק' המיוחדות האלה. נראה עוד דוגמה ואז נעבור למקרה הכללי.

דוגמא המשוואה:

$$y'' - y - y = \cos x + 2 \sin x$$

אז נחפש פתרון מהצורה:

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

נציב:

$$-A \cos x - B \sin x + A \sin x - B \cos x - A \cos x - B \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

וזה הוא תנאי על A ו-B. על מנת שהמשוואה תתקיים, צריך שהמקדם של סינוס יהיה שווה לאפס וכך גם המקדם של קוסינוס. לכן אנו מקבלים 2 שוויונות:

$$\begin{cases} -A - B - A = 1 \\ -B + A - B = 2 \end{cases}$$

אלה הן 2 משוואות כל המקדים A ו-B. האם נצליח לפתור אותם? יש לנו:

$$\begin{cases} 2A + B = -1 \\ A - 2B = 2 \end{cases}$$

הפתרון הוא: $A=0, B=-1$ אז פתרון פרטי הוא: $-\sin(x)$ (אפשר להציב ולבדוק).
במקרה הזה מצאנו פתרון, אבל זה יכול לא להצליח (כמו שהיה במקרה הקודם כאשר $\alpha=0$).

הפתרון הכללי למשוואה הזו הוא:

$$y = -\sin x + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

כאשר y_1, y_2 צמד פתרונות למשוואה ההומוגנית.

נסכם את הדרך הראשונה

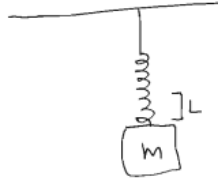
כאשר צד ימין הן פונ' מיוחדות שידועות לנו (וכאשר הן לא פתרון למשוואה ההומוגנית - כמו שקרה במקרה הראשון כאשר $\alpha=0$), מנחשים פתרון מאותה הצורה.

הדרך תעבוד גם למשוואות מהצורה: $e^x \cos x, x^n e^x$.

דוגמא (פיזיקלית) - חוק ניוטון

היא מראה את החשיבות והמשמעות של פתרון משוואות עם מקדמים קבועים. כאשר פתרון המשוואה הוא מרוכב לפתרון יש תנודות. הם לא קורות כאשר c שלילי, אבל בהרבה בעיות מופיעים דווקא המקרים שהפתרון מרוכב.

יש לנו קפיץ ועליו תלוי גוף, שכעת הוא בשיווי משקל והקפיץ מתוח באורך L מהמצב הטבעי שלו. הקפיץ מושך למעלה וכדור הארץ מושך למטה. מה שידוע זה חוק ניוטון שאומר: $ma = F$. נשתמש גם בחוק הוק ונקבל: $kL = mg$.



כעת מישוהו מושך את הגוף, ונסמן את המיקום של הגוף מנקודת שיווי המשקל ב- $u(t)$ ואז אנחנו מקבלים את המשוואה:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = mg - k(L + u)$$

ואם בנוסף יש עוד כוח חיצוני, אז צריך להוסיף אותו (נקרא לו F_1):

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = mg - k(L + u) + F_1$$

לסיכום, המשוואה הכללית לתנועת הקפיץ (נזכר - $kL = mg$):

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku + f$$

מקרה 1: כאשר שאין כוח חיצוני.

יתכן והדוגמא תתעדכן בעתיד.

שיטה לפתרון משוואה לא הומוגנית $Ly=f(x)$

כעת נראה דרך כללית שתמיד עובדת לפתרון משוואה מהסוג הזה. אז יש לנו את המשוואה:

$$Ly = f(x)$$

המקדמים בתוך Ly יכולים להיות לא קבועים, אך אנחנו נפתור רק למקרה שהמקדמים הם קבועים. אז יש לנו:

$$Ly = y'' + by' + cy$$

ופתרון כללי למשוואה ההומוגנית:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

כאשר y_1, y_2 הם בסיס למרחב הפתרונות למשוואה ההומוגנית.

כעת מחפשים פתרון ל- $Ly = f(x)$ מהצורה:

$$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$$

(אם u_1, u_2 קבועים, אז זה פתרון למשוואה ההומוגנית).

עכשיו מניחים כי (זה הוא שלב מאוד חשוב! אנחנו פשוט מציבים לעצמנו עוד תנאי!):

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

כעת (וודאו שזה נכון, עקב התנאי שהוספנו):

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$$

וכעת נציב הכל (את y_p, y_p', y_p'') במשוואה המקורית:

$$Ly = y'' + by' + cy =$$

$$\begin{aligned} & (u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2') + \\ & b(u_1 y_1' + u_2 y_2') + \\ & c(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ u_1 y_1'' + b u_1 y_1' + c u_1 y_1 = u_1 Ly_1 = 0 & & u_2 y_2'' + b u_2 y_2' + c u_2 y_2 = u_2 Ly_2 = 0 \end{array}$$

(שני החצים שיוצאים מבצעים סכימה לפי טורים). בסך הכל מקבלים:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$$

ובסך הכל יש לנו את מערכת המשוואות (האחרונה + ההנחה שלנו):

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f$$

נתסכל על הדט' של המערכת על מנת לראות האם יש לה פתרון:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W \neq 0$$

והאי שוויון האחרון נובע מכך הפתרונות מהווים צמד בסיסי ולכן הם בת"ל, והורונסקיאן שלהם שונה מ-0.

כלומר ניתן למצוא פתרון למערכת האלגברית למצוא את u_1', u_2' ואז בסכימה מוצאים את u_1, u_2 .

לאחר מכן יש לנו את הפתרון הפרטי המבוקש שלנו! (הוא: $y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$).

בשיעור הבא נרחיב על זה.