

מד"ר 1 – שיעור 11

השיעור נמשיך את ההוכחה לגבי פתרון בעיית קושי בפס. נסיים אותה בשיעור הבאה, ואז (בשיעור הבא) נתחיל משוואת מסדר גבוה יותר.

כמו כן נעשה גם חזרה על משוואות מסדר ראשון.

אז מה למדנו עד היום?

$$y' = f(x, y)$$

משוואות מסדר ראשון בצורה מפורשת, היא משוואת מהצורה:

אנו מדברים על פתרון קלאסי, כלומר ש- f היא פונ' רציפה. יש מושג של פתרון מוכלל, שם הפונ' f לא רציפה אבל אנחנו לא מדברים עליו.

אז אנו ראינו כמה שיטות לפתור משוואות מהצורה הזו. ראינו תמיד שהפתרון מובע עם קבוע שרירותי, אז פתרון כללי למשוואה מהסוג הזה הוא:

$$\varphi(x, y, c) = 0 \quad (*)$$

או בצורה מפורשת (נקרא גם קו אינטרגלי), כאשר מתקיימים תנאי משפט הפונ' הסתומה:

$$y = \phi(x, c)$$

פתרון סינגולרי: פתרון שהוא לא נכלל בנוסחא הכללית (*). בהמשך נראה דוגמא לכזה.

למדנו פתרון לבעיית קושי, וראינו משפט על קיום ויחידות. (כאשר C נקבע באיזה שהוא אופן - מקבלים פתרון פרטי).

דוגמא - בעיית קושי

$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם אנו פותרים את הבעיה הזו אנו מקבלים פתרון פרטי, ולא יהיה לנו בפתרון קבוע שרירותי. y_0 הוא זה שמבטל את הקבוע השרירותי, אם נתייחס אליו בעצמו כקבוע שרירותי, נקבל פתרון כללי, דוגמא:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = c \cdot e^x \Rightarrow y = y_0 \cdot e^x$$

נחזור לבעיה שראינו פעם: (כשהתחלנו עם בעית קושי, כדי לנסות להבין מה התנאים על מנת שיהיה פתרון והוא יהיה יחיד)

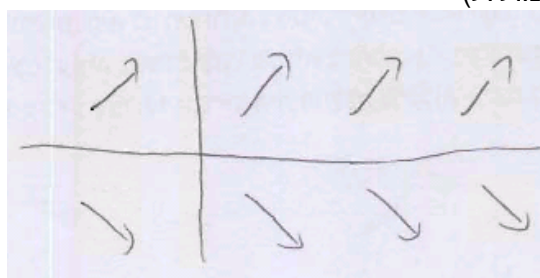
$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון אחד לזה אנו יודעים מיד: $Y=0$ זהותית. אבל יש עוד פתרון. נבצע הפרדת משתנים:

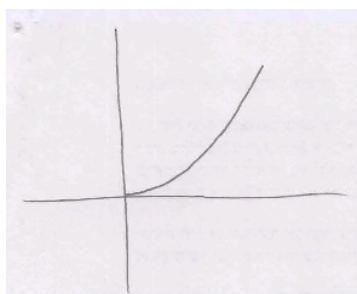
$$\begin{aligned} y^{-\frac{1}{3}} y' &= 1 \Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C \\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} (x + C) \\ y^2 &= \left[\frac{2}{3} (x + C) \right]^3 \\ y &= \pm \left[\frac{2}{3} (x + C) \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

נזכר כעת בשדה כיוונים, וננסה לצייר אותו. נשים לב שכש- y שלילי, הכיוון הוא שלילי. (נזכר ששורש שלישי מוגדר גם למספרים שליליים).

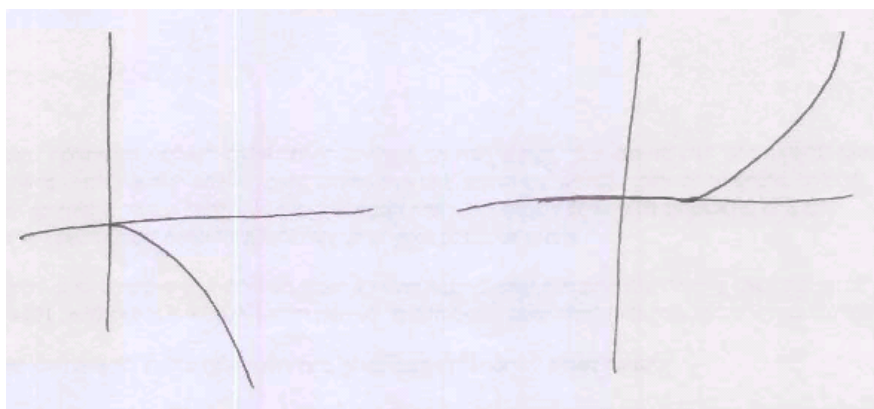
שדה הכיוונים: (בצורה מאוד סכמתית)



אז איך נראה הפתרון כאשר $c=0$, כלומר כיצד נראה $y = \pm \left(\frac{2}{3} x \right)^{\frac{3}{2}}$? אז הוא נראה כך:



אז זה פתרון שעובר דרך הנקודה שרצינו. הוא מקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0$. וכך ניתן לראות שאין יחידות. וכמובן שחוץ מזה יש עוד הרבה מאוד פתרונות.... למשל:



וזה הימני הוא הפתרון הזה:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \left[\frac{2}{3}(x-1)\right]^{\frac{3}{2}} & x > 1 \end{cases}$$

וכבר יש לנו שלוש פתרונות.

עבור כל C שלילי נקבל אפילו עוד פתרונות, לדוגמא עבור $C=5$, ונתחיל אותה מ- $x=5$, לפני זה הפונ' תהיה שווה ל- 0 זהותית. והפונ' הזו היא גם פתרון.

לכן (נוכל לקחת כל C שלילי ולעשות את זה) יש אינסוף פתרונות לבעית קושי הנתונה, נכתוב אותה שוב כדי לוודא שאנו זוכרים על מה אנחנו מדברים:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

לבעיה זו אין יחידות. וזה כי לא מתקיים תנאי ליפשיץ על ההקו $y=0$. (חשוב מאוד!!)

(כמובן שיש מקרים שבהם אין ליפשיץ אבל עדיין יש יחידות)

ועכשיו דוגמא לפתרון סינגולרי:

במקרה הזה $Y=0$ זהותית הוא פתרון סינגולרי - הוא איננו מתקבל מהנוסחא הכללית:

$$y = \left[\frac{2}{3}(x+C)\right]^{\frac{3}{2}}$$

איך זה יצא? כי במעבר הזה:

$$y' = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}} y' = 1$$

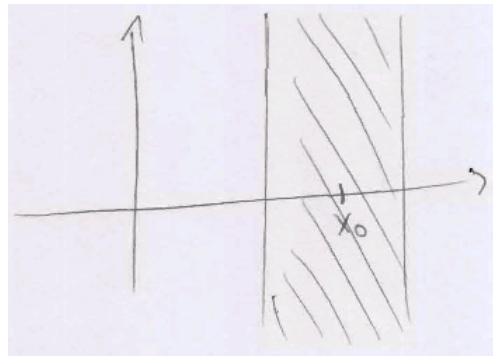
חילקנו ב- y ובלי לשים לב הנחנו שהוא שונה מאפס (זהותית) ובכך איבדנו את הפתרון הזה.

ולכן הנוסחא שנותנת את כל הפתרונות היא:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{2}{3} (x+c) \right)^{\frac{3}{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

משפט (זה משיעור קודם על הפס)

נניח ש- $f(x,y)$ רציפה בפס ותנאי ליפשיץ (לפי y) מתקיים עם קבוע L . הנה הפס:



אז איטרציות פיקרד לבעיה:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

מוגדרות לכל k (מספר האטרציה) ומתכנסות לפתרון של בעית הקושי.
אנחנו הוכחנו במקרה של מלבן, וזה למקרה של פס.

נזכר בהזדמנות זו שהוכחנו לגבי המקרה של מלבן שקיים פתרון לוקלי (שיכול להיות יותר קטן מ- a , במרחק של b/M מ- x_0). כמו כן היינו באמצע להוכיח שמשוואה לינארית - אם רציפות הפתרון קיים.

לפני ההוכחה נכתוב נוסחא, שהיא מאוד פשוטה:

$$\left| \int_{x_0}^x |x-x_0|^n dx \right| = \frac{1}{n+1} |x-x_0|^{n+1}$$

בעזרת נוסחא זו אפשר בצורה כללית להוכיח לשני המקרים של x_0 ביחד ל- x (במקום לחלק כמו תמיד למקרה ש- x גדול מ- x_0 ושהוא קטן ממנו).

הוכחת המשפט

האיטרציות נראות ככה:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0 \\ \varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds \\ &\vdots \\ \varphi_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_k(s)) ds \end{aligned}$$

מה שחשוב לשים לב זה שהנקודות שייכות לפס בלי קשר למקס' של הפונ' וכלי קשר לקבוע ליפשיץ.

את ההוכחה לזה נעשה באינדוקציה.

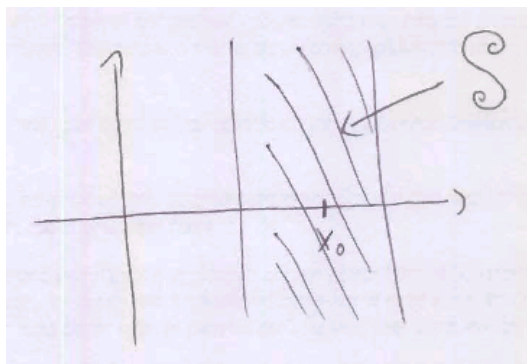
נניח שזה נכון עבור k ונראה עבור $k+1$.

למעשה זה נובע בגלל שהפס הוא אינסופי עבור y , והחלק האינדוקטיבי בה רק להראות שהאיטרציה הבאה בכלל קיימת (כי הפונ' רציפה אז קיים האינטרגל שלה, שמהווה את האיטרציה הבאה)

$$\begin{aligned} |s-x_0| \leq a \\ \Downarrow \\ (s, \varphi_k(s)) \in \mathcal{S} \Rightarrow (s, \varphi_{k+1}(s)) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

ולכן האיטרציות מוגדרות לכל k . נכתוב ונצייר את זה כי כיף לכתוב S מסולסלת:

$$(s, \varphi_k(s)) \in S$$



אז זה לגבי קיום של האיטרציות. פה עצרנו בשיעור הקודם, וכעת צריך להראות את ההתכנסות.

אנו צריכים להוכיח כי:

$$\forall |x - x_0| \leq a, \quad \varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$$

נסמן ב- N את המקסימום של ההפרש הזה: (הוא קיים כי הפונ' מוגדרת ורציפה בקטע סגור - הפס סגור)

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq N$$

כעת:

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_0(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \right| \leq N \cdot L \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$

עבור האיטרציה הבאה:

$$\begin{aligned} |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| &\stackrel{\text{Lip}}{\leq} \left| \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot N \cdot L \cdot |s - x_0| ds \right| = N L^2 \cdot \frac{|x - x_0|^2}{2} \end{aligned}$$

↑
לפי נוסחא מרכז
לפי ההוכחה

באינדוקציה ניתן להראות כי ההפרשים בין האיטרציות חסומים על ידי:

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq N \cdot \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}$$

ואז כמו בהוכחת המשפט עבור המקרה המלבני, מסתכלים על הטור (של פונ'):

$$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))$$

ומוכיחים התכנסות שלו.

מכיוון ש:

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

אז התכנסות הסדרה שקולה להתכנסות הטור. והתכנסות של טור הפונ' מראים בצורה הבאה:

איברי הטור חסומים על ידי: (כמו שהראנו):

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq N \cdot \frac{(L|x-x_0|)^k}{k!} \leq N \cdot \frac{(L \cdot a)^k}{k!}$$

כדי להוכיח ש
מספרים (L*a) כפי
שה'ה' ג'ו' ג'-x

כאן הוכחנו שטור הפונ' חסום על ידי טור מספרים מתכנס. ומכיוון שכך אז הטור $\sum (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$

מתכנס (במידה שווה, לפי המשפט מחדו"א), ולכן גם הסדרה $\{\varphi_k(x)\}$ מתכנסת ובמידה שווה!

ולכן הפונ' גבולית היא פונ' רציפה. בסך הכל:

$$\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$$

$|x - x_0| \leq a$

בפעם הבאה נראה שהפונ' הגבולית מתארת השוויון האינטגרלי ולכן מהווה פתרון. נראה גם יחידות.