

תרגול 3 במד"ר

היום נפתור משוואות מדוייקות.

נזכר בהגדרה של משוואה מדוייקת. נתונה המשוואה:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

המשוואה היא מדוייקת אם יש פונקציה $\psi(x,y) = C$ המקיימת $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$.

יש כזו אם התנאי הבא מתקיים:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \left(= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)$$

(זהו תנאי מספיק והכרחי - אם הוא מתקיים קיימת פונ' כזו ומיד נראה איך למצוא אותה. אם הוא לא מתקיים, אין טעם לנסות למצוא פונ' כזו - היא לא קיימת)

נניח שהתנאי מתקיים, איך נמצא את הפונקציה (נקרא לה פונקצית פוטנציאל)? נראה דוגמא.

נתונה הפונקציה:

$$\underbrace{(2xy^3 - x^2)}_M dx + \underbrace{(3x^2y^2 - 1)}_N dy = 0$$

נבדוק האם המשוואה היא מדוייקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

מכיוון שיש שיוויון היא מדוייקת.

לכן אנחנו יודעים שקיימת פונקצית פוטנציאל ומתקיים:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

ולכן:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$$

אז אני מחפשים פונ' פס"כ ששני התנאים האלו מתקיימים עבורה.

נעשה זאת בצורה הזו: ידוע כי:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy^3 - x^2$$

נבצע אינטגרציה (לפי X):

$$\psi = \int (2xy^3 - x^2) dx = x^2 y^3 - \frac{x^3}{3} + g(y)$$

ג' הוא קבוע האינטגרציה (ומכיוון שבזמן האינטגרציה הנחנו ש-Y קבועה, זו היא פונ' של Y)

כעת נזגור לפי Y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x^2 y^2 + g'(y)$$

מצד שני:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = M = 3x^2 y^2 - 1$$

ולכן:

$$\begin{aligned} 3x^2 y^2 + g'(y) &= 3x^2 y^2 - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \\ &\Rightarrow g(y) = -y + \bar{c} \end{aligned}$$

(סתם שמנו מעל ה-C קו, זה עדיין קבוע שרירותי רגיל)

נציב חזרה בפס"ש שמצאנו:

$$\psi = x^2 y^3 - \frac{x^3}{3} - y + \bar{C} = C$$
$$\psi = x^2 y^3 - \frac{x^3}{3} - y = C$$

אז מצאנו פונ' (או קבוצה של פונ' כי יש שם קבוע) שמקיימים את 2 התנאים שהצגנו קודם

(תזכורת, 2 התנאים הם: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$)

נזכר בכלל ה-5 דקות של לאוניד: אם אפשר למצוא נוסחה מפורשת של Y כפונ' של X אז לעשות את זה, אם לא - אז לא ניתן ויש להשאיר את זה בצורה סתומה. במקרה שלנו זו משוואה ממעלה שלישית, ואמנם יש נוסחה מפורשת אך מעולם לא למדנו אותה והיא מסובכת (ובטח שלא נצליח לפתח אותה תוך 5 דקות :-). ולכן משאירים את התשובה בצורה שקיבלנו.

גורם אינטגרציה

נניח כעת שוב שנתונה אותה משוואה:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

אך הפעם המצב במשוואה הנתונה הוא כזה:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

מה ניתן לעשות?

נוכל לכפול את המשוואה באיזו שהיא פונקציה אחרת (שאף פעם לא מתאפסת, ובכך יהיה שקילות בין המשוואות), כך שזו תהפוך להיות משוואה מדויקת:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

לפונקציה μ כזו (שהופכת את המשוואה להיות מדויקת) נקרא גורם אינטגרציה.

אז כמו שאמרנו בהרצאה, שיטה כללית למציאת מ"ז כזה לא נלמד, אבל נלמד למספר מקרים פרטיים:

1. כאשר מ"ז היא פונ' רק של X:

$$\mu(x, y) = \mu(x)$$

ואז (נניח את השוויון הראשון):

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N$$

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \mu'$$

נעביר מעט אגפים ונקבל:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} \quad (&)$$

האיבר בצד שמאל הוא פונ' רק של X (על פי הנחה על מ"ז). אם האיבר בצד ימין הוא פונ' רק של X אז יש מ"ז כזה כמו שאנו מחפשים.

2. כאשר מ"ז היא רק פונקציה של Y:

נקבל תנאי מאוד דומה:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = - \frac{M_y - N_x}{\mu} \quad (&')$$

(כלומר התנאי הוא שצד ימין של השוויון יהיה פונ' של Y)

נשים לב למונה כעת של (&) או (&'): אם הוא שווה לאפס, למעשה יש לנו משוואה מדויקת ואנחנו לא צריכים גורם אינטגרציה.

דוגמא

נתונה המשוואה:

$$(x^2 + y^2) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2xy - 1 \right) dy = 0$$

ולכן:

$$M = x^2 + y^2$$
$$N = \frac{x^3}{3} + xy^2 + 2xy - 1$$

נמצא את המונה של (&), שהוא גם של (&')
(אם הוא יצא אפס זו משוואה מדויקת ואנחנו לא צריכים גורם אינטגרציה)

$$M_y - N_x = 2y - (x^2 + y^2 + 2y) = -(x^2 + y^2)$$

כעת נוכל לבדוק האם אחד מהמקרים (&) או (&') מתקיים (יתכן שאף אחד מהם לא יתקיים, ואז אין לנו גורם אינטגרציה שהוא פונ' רק של X או גורם אינטגרציה שהוא פונ' רק של Y):

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-(x^2 + y^2)}{\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2xy - 1} \neq t(x)$$

זו לא פונ' של X, ולכן לא נוכל למצוא מ"ו גורם אינטגרציה שהוא פונ' רק של X. נבדוק את המקרה השני:

$$-\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 = t(y)$$

כאן כן קיבלנו פונ' של Y!

ולכן יש לנו:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = 1 \Rightarrow \mu(y) = e^y$$

(נוכל לבחור גם מ"ו אחר שמקיים את השוויון)

אז כעת יש לנו את המשוואה:

$$e^y(x^2 + y^2)dx + e^y\left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2xy - 1\right)dy = 0$$

ואנו יודעים כי היא מדויקת. נתחיל מאינטגרציה לפי X (מכיוון שזו פונקציה פשוטה יותר):

$$\psi(x, y) = \int e^y(x^2 + y^2)dx = e^y\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right) + g(y)$$

וכעת הנגזרת של מיו לפי Y (בשתי דרכים ובכך נוכל למצוא את g):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = e^y\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right) + e^y(0 + 2yx) + g'$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N = e^y\left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2xy - 1\right)$$

ומכל זה אנו מקבלים ש:

$$g' = -e^y \Rightarrow g = -e^y + \bar{c}$$

ובסה"כ הפתרון הוא:

$$\psi(x, y) = e^y\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right) - e^y = e^y\left(\frac{x^3}{3} + y^2x - 1\right) = C$$

(התעלמנו מהקבוע C עם גג מעל, הוא היה אמור להכנס איפה שהקופסאות עם החצים, אבל זה בסדר כי יש לנו את C)