

מד"ר 1 – שיעור 18

אנחנו כבר יודעים שכדי למצוא פתרון למשוואה הומוגנית אנחנו צריכים לצוא בסיס פתרונות. שוב, נסתכל על המשוואה ההומוגנית:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(בינתיים רק הומוגנית, יותר מאוחר נתעסק בלא-הומוגנית)

אנחנו מסמנים ב- Ly את צד שמאל ומחפשים פתרון מהצורה $y = e^{r \cdot x}$, כלומר מציבים אותו למשוואה ומקבלים שוויון הכרחי על מנת שזה יהווה פתרון:

$$ar^2 + br + c = 0$$

לביטוי הזה נקרא "פולינום אופייני" למשוואה לינארית הומוגנית מסדר שני.

לאחר מכן יש לנו כמה מקרים (לפי פתרונות המשוואה):

1. $r_1 \neq r_2$ (שונים)	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
2. $r_1 = r_2$	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{r_1 x}$
3. $r_1 = \overline{r_2}$ (מרוכבים)	$y = c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x}$

במקרה השלישי יש לנו פתרון על ידי פונ' מרוכבת, ואנחנו מעדיפים 2 פונ' ממשיים, לכן נקח סכום ונחלק ב-2:

$$\frac{e^{(\lambda + i\mu)x} + e^{(\lambda - i\mu)x}}{2} = e^{\lambda x} \cos \mu x$$

זו היא קומבינציה לינארית של פתרונות ולכן היא גם פתרון.

ועוד צירוף:

$$\frac{e^{(\lambda + i\mu)x} - e^{(\lambda - i\mu)x}}{2i} = e^{\lambda x} \cdot \sin \mu x$$

ואלה הם שני פתרונות בלתי תלויים ולכן גם הם מהווים צמד בסיסי.

בסך הכל, את הפתרון הכללי למקרה השלישי אפשר להציג כך:

$$y = e^{\lambda x} (c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x)$$

במה הוא שונה מהמקרים השונים? אם נסתכל על הגרף, הוא עושה תנודות. כל מנת לראות את זה בצורה מפורשת, ראינו בסוף השיעור הקודם כתיבה של הביטוי בתוך הסוגריים כביטוי של סינוס (ולא סכום של סינוס וקוסינוס). נחזור לזה. אז האם נוכל לכתוב את הפתרון בצורה:

$$y = e^{\lambda x} (c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x) \stackrel{?}{=} e^{\lambda x} \cdot A \cdot \sin(\mu x + \theta)$$

זו המטרה שלנו, לכתוב פתרון בצורה הזו. כי אז רואים יותר במפורש את המחזוריות. אנו נרצה לכתוב את זה בצורה כזו כי אז יהיה יותר קל לנתח את זה גרפית ונראה מבחינה אנליטית את התנודות בקלות. מה המחזור של הפונק' הזו?

אז טטה לא משנה, כי זה הזזה. כנ"ל לגבי A. המחזור של הפונ' הזו הוא: $\frac{2\pi}{\mu}$.

אז איך נכתוב את הפונ' בצורה הזו? טוב האמת כבר עשינו את זה בסוף שיעור שעבר, נעשה את זה שוב עכשיו. נוציא קבוע מחוץ לסוגריים:

$$e^{\lambda x} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \mu x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \mu x \right)$$

כעת נרצה למצוא טטה כך ש: (כדי שנוכל אחרי זה להשתמש בזחות של סינוס של סכום)

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \theta \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \theta$$

אחת הדרכים למצוא את זה זה לחלק את שתי המשוואה ולקבל: $\operatorname{tg} \theta = \frac{c_1}{c_2}$ (אותה תמיד אפשר

לפתור: $\theta = \operatorname{arctg} \frac{c_1}{c_2}$, רק צריך לוודא עם הסימנים שאנחנו באמת מקיימים את שני השוויונות הראשונים, כלומר האם לבחור את הפתרון הישיר שמקבלים מ- arctg או האם צריך להוסיף לו פ", כלומר לקחת את הפתרון $\theta + \pi$ שיגרום להחלפת את הסימן).

רגע של מוטיבציה

אנחנו מתייחסים לכל הנושא הזה (של הגרף הדיוק מתנהג) כי הפתרונות האלה מופיעים בבעיות פיזיקליות שיש בהן תנודות (למשל תנודות קפיץ עם גוף עליו, כל מיני דברים בחשמל וכו').

אז הפתרון הכללי למקרה של $r_1 = \bar{r}_2$ (המקרה השלישי של פתריות הפולינום האופייני) הוא:

$$y = A \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x + \theta)$$

בצורה כזו יש שני קבועים, A וטטה, והם נקבעים על ידי תנאי ההתחלה.

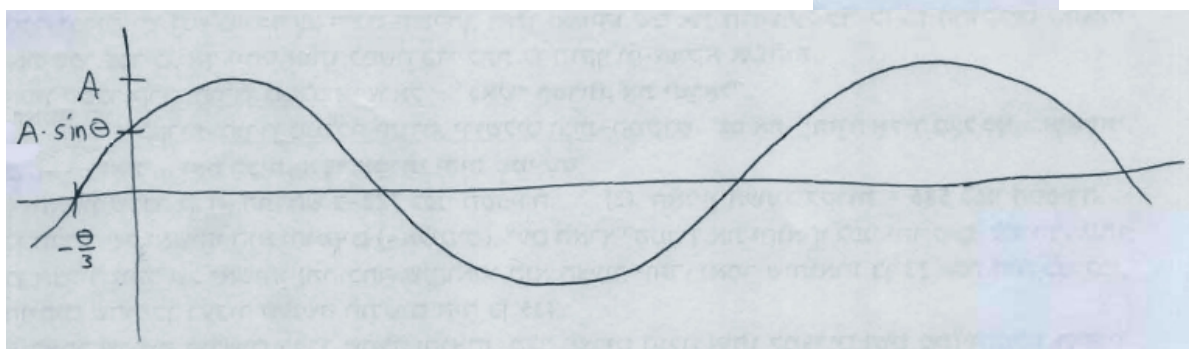
$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \theta = \arctg \frac{c_1}{c_2}$$

עכשיו נרצה לצייר ציור של הפתרון הזה.

מקרה 1

כאשר $\lambda = 0$, למשל במשוואה $y'' + 9y = 0$ הפתרונות הם $\cos 3x, \sin 3x$. הפתרון הכללי

במקרה זה הוא: $A \cdot \sin(3x + \theta)$. שרטוט שלו:

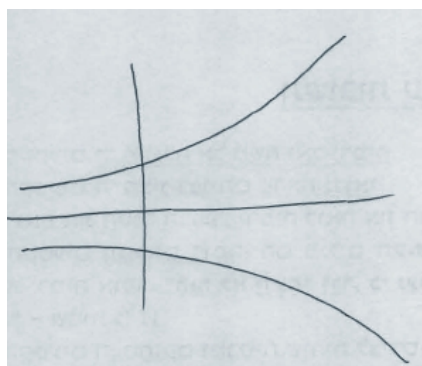


(כאן האמפליטודה היא קבועה)

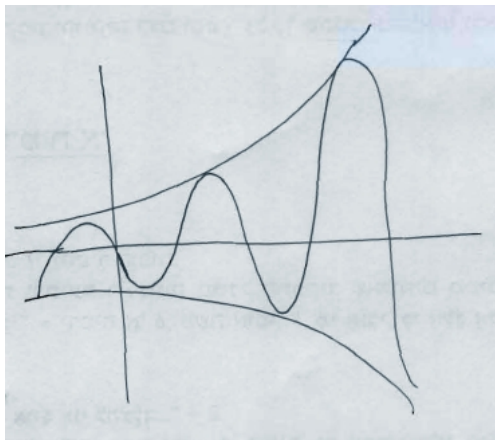
מקרה 2

כאשר $\lambda > 0$. במקרה הזה האמפליטודה עולה. המקרה הכללי הוא: $A e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x + \theta)$. איך

נראה הפתרון כאשר $\lambda > 0$. צריך לקחת את המקרה הקודם ולהכפיל אותו באלמנט המעריכי. לכן, נכין תחילה אקספוננט:



וכעת נכניס בו את הסינוס:

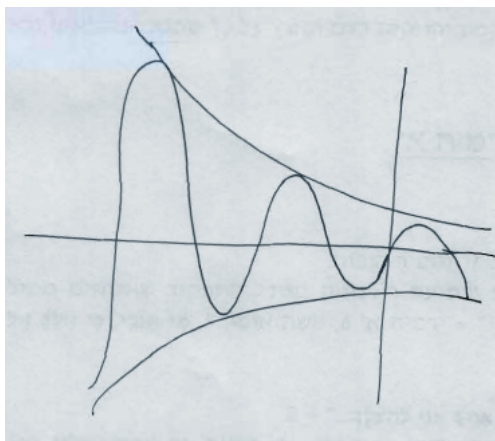


כלומר יש לנו סינוס שבמשך הזמן (כלומר כש- x שואף לאינסוף) האמפליטודה עולה (גם שואפת לאינסוף).

בנקודות השיא, כאשר הערך של $\sin$ הוא 1, הערך של הפונ' היא: $A \cdot e^{\lambda x}$.

מקרה 3

כאשר $\lambda < 0$. הפוך מהקודם:



בעיית שפה

לפונ' סינוס של אפסים (ואנחנו יודעים אותם), ובין שניהם יש פתרון לא טריוויאלי שיש לו 2 אפסים בקצוות, אם נבקש תנאי התחלה כאלה זה יהיה שונה מבעיית קושי אלא בעיית שפה. הדוגמא תבהיר.

דוגמא:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

והפתרון לבעיה הזו הוא: $y = \sin x$. אך קיים גם הפתרון הטריוויאלי...
זו לא בעיית קושי, כי בבעיית קושי נותנים 2 תנאים בנקודה אחת. זו היא בעיית שפה.

הבדל בין בעיית קושי לבעיית שפה: בעיית שפה היא בדרך כלל יותר קשה, ובבעיית שפה לא תמיד יש יחידות, כמו במקרה הזה - כאן הפתרון הוא $A \sin x$ לכל A (כלומר יש אפילו אינסוף פתרונות).

תכונות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני – אי קיום מקסימום חיובי

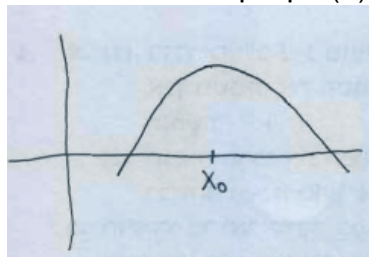
נתונה המשוואה:

$$(1) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

(תמיד נניח כאן ש- a הוא חיובי. אם לא אז נכפיל ב: -1)

מה הם תכונות הפתרון למשוואה זו? אז יש כל מיני תכונות שאנחנו יכולים לדעת על הפתרון גם מבלי לפתור את המשוואה, השיעור אנחנו נראה את התכונה: אין מקסימום חיובי (ומינימום שלילי).

טענה: נניח כי $c < 0$. אז לכל פתרון של (1) אין מקסימום חיובי. זאת אומרת שלא יכול להיות מצב כזה:



(שיש מקסימום מעל ציר ה- x)

התכונה הזו נכונה גם כאשר המקדמים לא קבועים (כאשר a הוא פונ' חיובית בכל התחום, ו- c היא פונ' שלילית בכל התחום).

הוכחה:

נניח שב- x_0 הפתרון מקבל מקסימום והוא חיובי (כלומר כמו בשרטוט). אם כך, לפי המשוואה:

$$by'(x_0) = 0$$

(כי זו נקודת קיצון)

$$cy(x_0) < 0$$

(כי c שלילי ואנחנו מניחים שהמקס' הוא חיובי)

$$ay''(x_0) \leq 0$$

(כי זו נקודת מקסימום)

נסתכל על:

$$(ay'' + by' + cy)|_{x=x_0} = 0$$

וזו היא סתירה (מצד אחד שווה לאפס כי הוא פתרון, מצד שני שלילי על פי ההנחות).

בלי לדעת את הפתרון אנחנו יכולים לדעת תכונות של הפתרון. באותו אופן, לא יכול להיות מינימום שלילי.

דוגמא לשימוש:

עבור המשוואה $y^2 - y = 0$ אנחנו יודעים שאין לה נק' מקס' ומינ'. כלומר מבלי לדעת את הפתרון אנחנו יודעים שאין לה תנודות!

פעם אחת יכולה להיות נקודת קיצון (מקסימום שלילי - עבורו תהיה חייבת להמשיך לרדת כי לא יכול להיות לה מינימום שלילי, או מינימום חיובי - עבורו תהיה חייבת להמשיך לעלות כי לא יכול להיות לה מקסימום חיובי). אבל רק פעם אחת. כלומר בשאיפה לאינסוף הפונקציה היא מונוטונית.

נזכר שוב שכל זה היה עבור $c < 0$ (סי שלילי).