

מד"ר 1 – שיעור 6

שיעור שעבר למדנו על משוואות מדוייקות. והתחלנו לראות דוגמא לפתרון של משוואה מדוייקת. נסיים את הנושא ונמשיך לנושא "גורם אינטגרציה".

ניזכר: משוואה מדוייקת היא משוואה הנתונה בצורה:

$$M dx + N dy = 0 \quad \left(\text{גורם אינטגרציה} \right)$$

כאשר M, N הן גזירות בתום פשוט קשר, ומתקיים

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

אם התנאים האלו מתקיימות קיימת פונ' u כך ש:

$$u_x dx + u_y dy = 0$$

$$du = 0 \Rightarrow u(x, y) = \text{const}$$

נראה איך אנחנו מוצאים פונקציה u כזו

דבר ראשון, ידוע ש:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

לזה נוכל לעשות אינטגרציה לפי x :
(נניח שהתחום שלנו הוא במלבן:

$$(a < x < b, c < y < d) \quad : D$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \varphi(y) \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} (x_0, y_0) \in D \\ \gamma \text{ במסלול} \end{array} \right)$$

כאן γ מסלול יק- γ
מא x_0 אל x

אז מצד אחד ידוע לנו כי:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \varphi(y)$$

ומצד שני:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

ולכן (נבצע אינטרל תלוי בפרמטר [הסבר עוד כמה שורות מה בדיוק אנו עושים כאן ולמה מותר לנו "להכניס" את הנגזרת לתוך האינטגרל]):

$$(*) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(s, y)}{\partial y} ds + \varphi'(y) = N(x, y)$$

↑
נגזרת לפי y

מה זה אינטגרל תלוי בפרמטר?
בניח יש לנו:

$$I(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$$

אז אומרים שהאינטרל הזה תלוי ב- t כפרמטר (פרמטר - כי הוא לא קשור לאינטגרל, התלות של I בו היא לא בגלל האינטגרל)
הגדרת הנגזרת (אם היא קיימת) של I לפי t היא:

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

בדיקה להגדרה
 ק"מ והכר תלך
 נכנסים מן הגבול
 כנ"מ

לכן נגזרת של אינטגרל = אינטגרל של נגזרת.

כעת:

$$\psi'(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} ds = N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x}(s, y) ds =$$

(ה) גזירה: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

& פי צריכה להיות תלויה רק ב- y ולכאורה היא תלויה כאן גם ב- x. מיד נראה איך זה מסתדר...

$$= N(x, y) - [N(x, y) - N(x_0, y)] \Rightarrow \psi'(y) = N(x_0, y)$$

וכאן אנו רואים שפי תלויה רק ב- y.

בתרגילים, אם לא קיבלנו בסוף שפי תלויה רק ב- y, אז עשינו כנראה טעות.

את מה שעשינו פה יכולנו רק בגלל שזו היא משוואה מדויקת (כשהחלפנו את $\frac{\partial M}{\partial y}$ ב- $\frac{\partial N}{\partial x}$)

במשך:

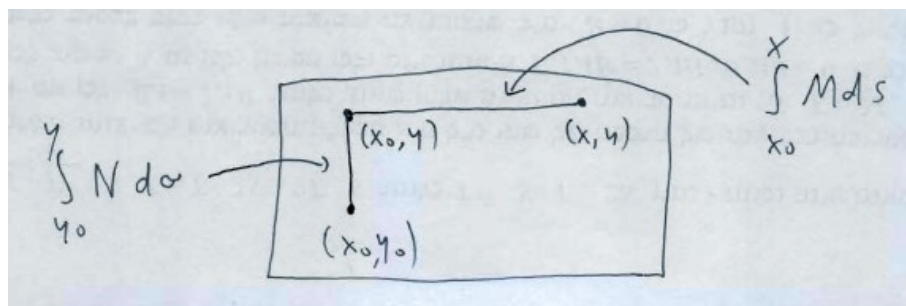
$$\psi'(y) = N(x_0, y) \Rightarrow \psi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, \sigma) d\sigma + C$$

נחזור ל- u :

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, \sigma) d\sigma + C$$

ובכך מצאנו את הפוקנציה u ! (נשים לב לקבוע השרירותי - אם u פתרון אז גם $u+C$ פתרון)

כעת נסתכל על המלבן: (ונניח כי $u(x_0, y_0)$ נתון)

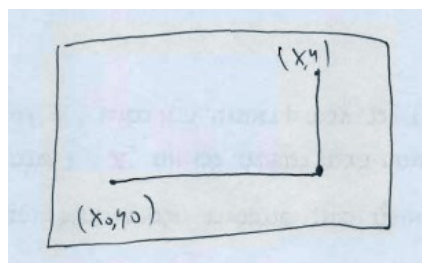


מה הוא האינטגרל השני בביטוי שמצאנו ל- u ? זה הוא אינטגרל לאורך הקו המאונך לציר ה- x . האינטגרל הראשון הוא אינטגרל לאורך הקו המקביל לציר ה- x . האינטגרלים האלה הם מקרים פרטיים של אינטגרל קווי.

הצורה הכללית לאינטגרל קווי:

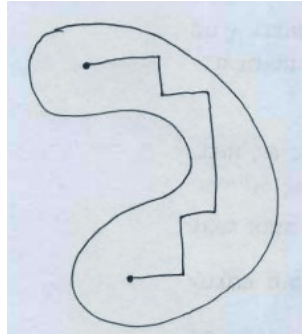
$$\int P dx + Q dy$$

עולה השאלה למה התחלנו דווקא מאינטגרציה לפי X . אם היינו מתחילים באינטגרציה לפי Y , היינו מקבלים אינטגרל קווי כזה:



בתרגילים אנחנו נתחיל עם מה שיותר נוח..

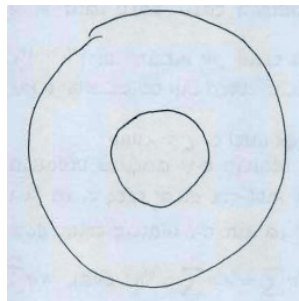
כעת נבין למה דרשנו תחום פשוט קשר. נקשר לדוגמא את 2 הנקודות בתחום הבא:



לא נוכל להגיע בין הנקודות באמצעות שני קווים מקבילים ונצטרך (כמו שרואים בשרטוט כמו קווים כאלו).

אפשר להוכיח שבהתחום שהוא פשוט קשר, אז האינטרגל לא תלוי במסלול. לכן אם תהיה שאלה למצוא אינטרגל בתחום שראינו, נוכל להחליט איך לעשות את זה.

למה אם יש חור זה לא נכון? לדוגמא ב:



התשובה היא פי פה הפונק' היא לא חד ערכית ונוכל להגיע עם כיוון השעון או נגד, ונקבל תוצאות שונות. (שוב, על פי משפט מחדוא, אנחנו לא אמורים להבין למה).

כעת נעשה דוגמא!
נקח את המשוואה:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

נשים לב שזו היא לא משוואה לינארית, לא הפרדת משתנים וכו' (כלומר זה לא מסוג המשוואות

שלמדנו עד כה לפתור [חוץ ממשוואות מדוייקות]. טוב נו אולי אם נעשה כל מיני החלפות משתנים וכאלה אז נגיע לצורה שלמדנו לפתור

נבדוק שהמשוואה היא מדוייקת. לשם כך עלינו לבדוק את:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

הם שווים ולכן היא מדוייקת. כעת עלינו למצוא את u .
נבחר את נקודת ההתחלה כ- $(0,0)$, כי עבור פולינומים קל להתחיל את הסכימה משם. (היינו יכולים לקחת נקודה אחרת):

$$u(x,y) = \int_0^x (3s^2 + 6sy^2) ds + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

כעת, ידוע לנו מצד שני כי:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = N = 6x^2y + 4y^3$$

ומכאן נוכל למצוא את φ של y :

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$$

מכיוון שזה לא תלוי ב- x , זו אכן משוואה מדוייקת ולא עשינו טעות בדרך.

חזרה ל- u :

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$$

נזכר שבגלל שהמשוואה היא מסדר ראשון יש לנו רק קבוע שרירותי אחד. התעלמנו עד כה ממנו. ניתן עכשיו את הפתרון הסופי:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

זהו פתרון המשוואה בצורה של פונ' סתומה. כדי למצוא את y כפונ' של x יש לפתור את המשוואה הזו ביחס ל- y (לא תמיד ונוכל ואז נשאיר את זה כך).
את המשוואה הזו ספציפית אפשר להביא לצורה מפורשת (כי זה משוואה ריבועית ביחס ל- y^2).

כעת נניח כי נתון תנאי התחלה:

$$y(1) = 2$$

עלינו להציב במשוואה למצוא קבוע שמקיים את התנאי:

$$1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2^4 = C \Rightarrow C = 28$$

(כמו כן, צריך לבדוק שהנגזרת לפי Y בנקודה זו לא מתאספת על מנת שיתקיים התנאי של משפט הפונ' הסתומה. אם לא מתקיים - אז יתכן שיש 2 פתרונות, אבל בכל מקרה יש לבדוק זאת פרטנית)

נעבור לנושא הבא:

גורם אינטגרציה

נניח נתונה המשוואה:

$$M dx + N dy = 0 \quad (1)$$

ונניח שהיא איננה מדויקת, כלומר:

$$M_y \neq N_x$$

נכפיל את שני האגפים בפונקציה שלא מתאפסת ונקבל משוואה שקולה:

$$(uM)dx + (uN)dy = 0 \quad (1') \quad (u(x,y) \neq 0)$$

יתכן שהמשוואה שקיבלנו עכשיו היא מדויקת. אז למעשה השאלה היא: האם אפשר למצוא פונקציה מ"י כך ש: (1') היא מדויקת. אם קיים מ"י כזה - נקרא לו גורם אינטגרציה. (ואנו יודעים איך לפתור את המשוואה, כי היא מדויקת)

אז איך אנחנו מוצאים גורם אינטרציה?

תחילה - מה התנאי שהוא יהיה קיים?

אז התנאי שמיו יהיה גורם אינטגרציה הוא:

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}$$
$$M \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} \cdot u = M \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot N$$
$$M(M_y - N_x) = N \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial N}{\partial y}$$

קיבלנו משוואה למ"י עם נגזרות חלקיות.

זו משוואה מסדר ראשון, אך יש בה נגזרות חלקיות. אז יש שיטות לפתור אותה - אך היא פחות או יותר קשה כמו הבעיה המקורית. לכן לא נוכל לתת את השיטה הכללית לפתרון הבעיה.

מה נוכל לעשות?

לפעמים יתנו לנו רמז. או שאפשר לנסות לנחש:

אפשר לנסות לחפש מ"י שתלוי רק באיקס (ואז נקבל משוואה רגילה שננסה לפתור עם הפרדת משתנים), או מ"י שתלויה באיזו קומבינציה מסויימת של X ו-Y, כמו למשל X+Y.

הרעיון הוא לנסות לחפש מ"י שתהיה תלויה רק במשתנה אחד (אפילו שהוא קומבינציה של X ו-Y).

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

נחפש את מ"כ פונ' של X . (כלומר נניח שקיים מ"כ כזה שהוא פונ' של x)
אם נניח שקיים מ"כ כזה, אז אנו מקבלים ש:

$$\frac{\partial \mu(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x^2 + y^2)}{\partial x}$$

(זה עדיין לא אומר שמ"כ כזה קיים). נמשיך לפתח:

$$\mu(2x + x^2 + y^2) = \mu'(x^2 + y^2) + \mu 2x$$

$$\mu(x^2 + y^2) = \mu'(x^2 + y^2) \Rightarrow \mu = \mu' \Rightarrow \mu = e^x$$

מספיק לקחת איזה שהוא פתרון (כאן בחרנו e^x , יכולנו לדוגמא גם $3e^x$). [כי זכותינו להכפיל את המשוואה המקורית באיזה פונ' שאנחנו רוצים].
אז יופי! נראה כי מצאנו מ"כ מתאים! כעת אם לא עשינו טעויות זה אמורה לצאת משוואה מדוייקת (הקורא החרוץ יבדוק שזו באמת מדוייקת):

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) dx + e^x(x^2 + y^2) dy = 0$$

כך נוכל לפתור ובסוף להגיע לפתרון (הדרך לא מובאת כאן):

$$\underbrace{ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3})}_u = c$$

(ושוב, נזכיר! צריך להיות רק קבוע שרירותי אחד! מספר הקבועים השרירותיים הוא כסדר המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה!).

נושא חדש:
עד עכשיו למדנו כמה שיטות לפתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות.
כעת נעבור לתיאוריה כללית לפתרון בעית קושי.

בעית קושי למשוואות מסדר 1

אנו נניח כי יש לנו את המשוואה בצורה מפורשת:

$$y' = f(x, y)$$

וש- F היא פונק' רציפה במלבן:

$$a \leq x \leq b, \quad c < y < d \quad : D$$

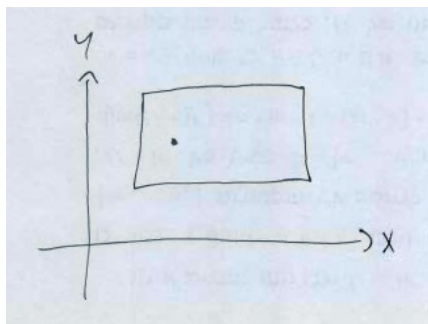
כמו כן, נניח כי הפונק' F חסומה במלבן:

$$F(x, y) \leq M < \infty \quad (D)$$

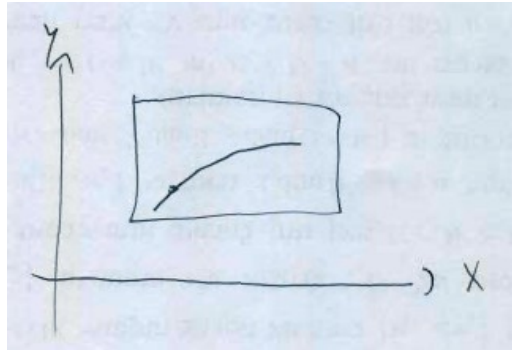
לבסוף, נתונה גם הנק':

$$(x_0, y_0) \in D \quad y(x_0) = y_0$$

מבחינה גרפית יש לנו את השרטוט הבא:



ופתרון הוא מציאת פונקציה שעוברת דרך הנקודה:



בעיה זו נקראית בעיית קושי.

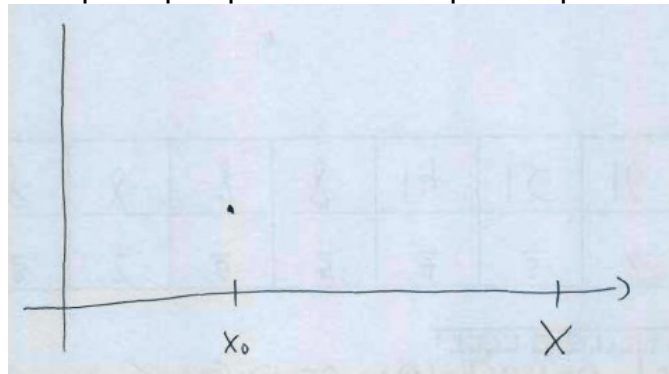
אנו נרצה לענות על השאלות:

- האם קיים פתרון?

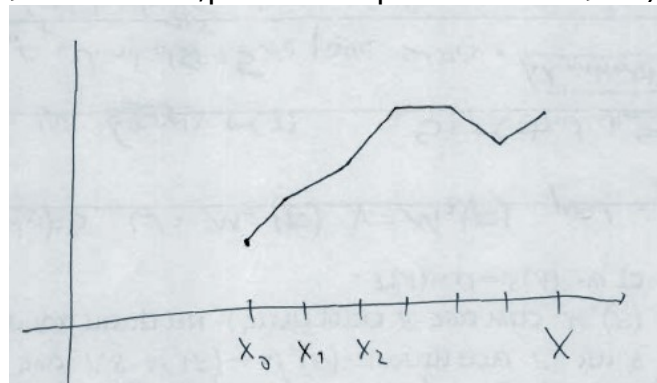
- האם הפתרון הזה יחיד?

(נזכר - פתרון: למצוא Y כפונ' של X . כלומר למצוא קו: $y = \phi(x)$ שעובר דרך הנקודה: (x_0, y_0))

כעת נזכר שלמדנו על שדה כיוונים. נסתכל עליו בנקודה הנתונה. יש לנו בה משיק של הקו (כי יש לנו את כל השדה), כלומר אנחנו יודעים איך הקו הולך ממנה. אז אפשר להתקדם עליו זמן כלשהוא אבל כדי להשאר מדויקים נחליף לאחר כמה זמן כיוון. במקרה הנ"ל:



נחלק את הקטע לקטעים (תתעלמו זמנית מהקו השבור כאן, תחזרו אליו עוד כמה שורות):



והפתרון המקורב יהיה ללכת ע הקו המשיק עד שמגיעים לנקודה הבאה, ואז נחליף כיוון.
(נסמן בפי את הפתרון המדוייק וב-y את הפתרון המקורב שאנו מייצרים)

$$h = \frac{X - x_0}{N}, \quad X_{n+1} = X_n + h$$

$$y(x_1) = y(x_0) + h \cdot F(x_0, y_0)$$

$$\underbrace{y_1} = \underbrace{y_0} + h \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}(x_0)}$$

$$y_2 = y_1 + h F(x_1, y_1)$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n)$$

מקבלים כקירוב פתרון קו שבור.
השיטה הזו נקראת שיטת אויילר והקו נקרא קו אויילר.

הדבר הטבעי כעת לעשות זה להשאיר את h לאפס (ולקוות שזה מתכנס לפתרון).
נסמן את סדרת ה- y^h עים ב:

נשאיר את h לאפס ונקבל סדרת סדרות עים (סדרה של פונקציות):

$$h \rightarrow 0, \quad \{y^h\}_{h=h_1, h_2, \dots}$$

ואז:

$$y^h \rightarrow \varphi(x) \quad \text{כאשר} \quad h \rightarrow 0$$

השיטה הזו היא שיטה בומרית!

כדי להצדיק את מה שעשינו נביא את משפט פיאנו:
 קיים פתרון לבעיית קושי, כלומר למשוואה 1 עם תנאי התחלה 2 בסביבה של (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

אם f מקיימת את התנאים a, b, c :

$$\begin{aligned} & y' = f(x, y) && f \text{ רציפה} && (a) \\ & a \leq x \leq b, \quad c < y < d && : D && (b) \\ & f(x, y) \leq M < \infty && (b) && (c) \\ & (x_0, y_0) \in D && y(x_0) = y_0 && (c) \end{aligned}$$

משפט Ascoli-Arzelà:
 בניח נתונה סדרה של פונ':

$$\{ \varphi_n(x) \} \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

ומתקיימים התנאים:

$$\begin{aligned} 1) & \quad |\varphi_n(x)| \leq M \quad (M \text{ גל } n) \\ 2) & \quad \{ \varphi_n \} \text{ רציפה במידה שווה גל } n \text{ בדרג } n \\ & \quad |\varphi_n(x+\Delta x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon, \quad |\Delta x| < \delta, \quad \delta \text{ גל } n \text{ ו-} \varepsilon \\ & \quad \text{יש גל } n \text{ בדרג } n \end{aligned}$$

(כלומר חסומות במידה אחידה, ורציפות במידה אחידה)

כך ש:

$$\{\varphi_{n_k}(x)\}$$

אז - קיימת תת סדרה של פונ':

$$[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_{n_k}(x) \rightarrow \varphi(x)$$

בעזרת המשפט הזה מוכיחים את משפט פיאנו.

אך - יכול להיות שאין יחידות!

נראה דוגמא (שאינן יחידות לבעיה קושי).

זה יראה שתנאים על רציפות של f (שהבאנו) לא מספיקים כדי לקבל יחידות.
דוגמא:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

אז מה הפתרון למשוואה הזו?

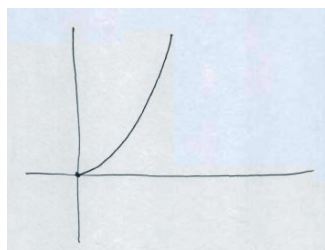
זו היא משוואה מסוג שאנחנו מכירים, נפתור את זה. פתרון אחד מופיע מיידית - והוא $y=0$ זהותית.
נמשיך:

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = dx \Rightarrow x+c = y^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow y = \left[\frac{2}{3}(x+c) \right]^{\frac{3}{2}}$$

נקח כעת: $C=0$. מה שנקבל זה פתרון כזה:

$$y = \left(\frac{2}{3} x \right)^{\frac{3}{2}}$$

איך הוא נראה? כך:

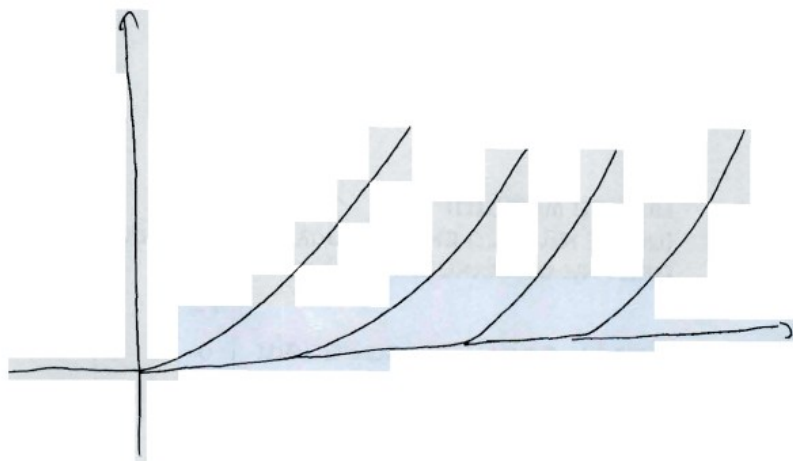


אז יש לנו 2 פתרונות לבעיה קושי.
אם ננסה לפתור אותה עם שיטת אוילר אנחנו נקבל רק פתרון אחד, את $Y=0$ זהותית (ודאו שאתם מבינים למה).

כדי להוסיף לבאסה, נראה שיש אפילו עוד פתרון!

$$y'(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ \left[\frac{2}{3}(x-1)\right]^{\frac{3}{2}} & x > 1 \end{cases}$$

למעשה אנחנו לא חייבים לבחור 1 ויש לנו אינסוף פתרונות:



נמשיך שיעור הבא (וואלה..)