

מד"ר 1 – שיעור 27

נחזור למה שעשינו בשיעור שעבר - המושג של אקספוננט של מטריצה.
אנחנו רוצים לפתור מערכת משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים – והרעיון הזה עוזר לנו.

המשוואה היא מהצורה:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$$

הגדרנו נורמה של מטריצה וראינו כמה שוויונות שכדאי לדעת למבחן:

$$|AB| \leq |A||B|$$

בתכונה זו משתמשים כדי להגדיר מטריצה מעריכית. ההגדרה היא:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

כלומר מטריצה מעריכית היא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \dots + \frac{A^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{k!} \right)$$

והגבול קיים (כלומר כל איבר במטריצה שואף למספר).

הנוסחא האחרונה זו ההגדרה של e^A . התכונה של המטריצה e^A (שהוכחנו בשיעור שעבר) היא:

$$\frac{d e^{xA}}{dx} = A e^{xA}$$

הנוסחא הזו נכונה רק כאשר A היא מטריצה קבועה.

כעת - נסביר מה זה נותן לנו (המשוואה האחרונה) לצורך פתרון מערכת משוואות?
המשוואה האחרונה היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ (e^{xA})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ e^{xA} \end{pmatrix}$$

כדי ליצור את העמודה הראשונה של $(e^{xA})'$ אנחנו מכפילים את השורה הראשונה של A בעמודה הראשונה של e^{xA} . השניה את השורה השנייה של A ושוב בעמודה הראשונה של e^{xA} .
לכן כל וקטור שמהווה עמודה של המטריצה e^{xA} הוא פתרון.
למשל φ_1 , העמודה הראשונה, מהווה פתרון כי:

$$\frac{d \vec{\varphi}_1}{dx} = A \vec{\varphi}_1$$

אם נתונה לנו A , ונחשב את e^{xA} נוכל למצוא את הפתרונות. זה לא תמיד קל, אבל אם מצליחים זה נותן

פתרון בצורה מפורשת. מיד נראה דוגמא של זה.

דוגמא

נתונה המטריצה בצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

איך נחשב את e^{xA} ? הגבול הוא מטריצה בגודל 2×2 שמהווה את גבול הטור לפי ההגדרה. אנחנו יודעים מהשיעור שעבר ש:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(בגלל כפל של מטריצות אלכסוניות). מה לגבי המקרה שלנו עכשיו שהוא לא אלכסוני. נכתוב את ה-A שלנו ככה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + Z$$

כעת נשתמש בכלל $e^{a+b} = e^a e^b$ שעובד גם במטריצות (כל ההוכחות מאוד דומות לאלה של מספרים) ואז עלינו לחשב את:

$$e^{xA} = e^{x(\lambda I + Z)} = e^{\lambda x I} \cdot e^{xZ}$$

את המוכפל הראשון אנחנו יודעים לחשב (כי זה אקספוננט של מטריצה אלכסונית). לגבי המוכפל השני, $Z^2 = 0$ (מטריצת האפס) ולכן:

$$e^{xZ} = I + xZ + 0 + 0 + \dots = I + xZ = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז כעת בסך הכל אנחנו מקבלים:

$$e^{xA} = e^{\lambda x I} \cdot e^{xZ} = (e^{\lambda x} \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

במקרה זה למעשה יכולנו לפתור את מערכת המשוואות המושרה מ-A בדרך אחרת וזה לא היה קשה, אבל אנחנו עושים את זה כדי לראות איך פתרים דברים באמצעות מטריצות.

אז כעת מצאנו את המטריצה. איזה מערכת מתאימה למטריצה הזו?

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \Rightarrow \left[\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \lambda y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda y_2 \end{cases}$$

והפתרון הכללי הוא (לפי זה שחישבנו את $e^{\lambda x}$):

$$\vec{y} = c_1 \cdot e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

האם צריך להראות שהם בת"ל? כן. אז לא נראה את זה עכשיו אבל במבחן צריך לעשות את זה. אם נתונה מטריצה - אז המערכת של העמודות זה בסיס. במקרה הזה פשוט להראות שהם בת"ל כי הפתרון הראשון הוא מעריך והשני הוא x כפול מעריך.

שוב נזכיר

בפתרון מערכת מסדר ראשון של 2 משוואות יש 2 קבועים שרירותיים ולא יותר.

אז זה הפתרון הכללי. אם צריך למצוא פתרון שמקיים תנאי התחלה, אז פשוט עושים את זה. למשל אם תנאי ההתחלה הוא:

$$\begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$$

נציב ונקבל:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 = 3 \\ y_2(0) = c_2 = 2 \end{cases}$$

וזה פתרון פרטי שמקיים תנאי התחלה. (כלומר אחרי שנציב את c_1, c_2 שמצאנו הרגע).

אם נתונה מטריצה A , ידוע מאלגברה שלכל מטריצה אפשר להביא לצורת ג'ורדן. בגלל שאף אחד מאיתנו לא באמת זוכר את כל הנושא הזה נעשה חזרה קצרה.

B דומה ל- A אם קיימת מטריצה P לא מנוגת (= הפיכה) כך ש: $B = PAP^{-1}$.
אומרים ש- B ו- A הם מטריצות דומות.
משפט: לכל מטריצה A קיימת מטריצה B שדומה לה שיש לה צורת ג'ורדן.

מה זה מטריצה בצורת ג'ורדן? זו מטריצה שיש בה תיבות ג'ורדן:

$$J = \begin{pmatrix} \square & & \bigcirc \\ & \square & \\ \bigcirc & & \square \end{pmatrix}$$

ותיבות גורדן היא:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

(λ על האלכסון הראשי ואחדים על האלכסון מעל הראשי)

למעשה ה- A שקיבלנו בדוגמא מתחילת השיעור היא כבר בצורת ג'ורדן (ואם תיבה אחת).

צורת ג'ורדן מופיעה במקרה שיש ערכים עצמיים מרובים (כפולים). מה היתרון בצורה זו והשימוש בה במשוואות? לצורת ג'ורדן יותר קל למצוא פונקציה מעריכית. אז נשאל באופן כללי: מה זה פונקציה אקפונציאלית למטריצה שהיא מצורת ג'ורדן? נסמן (כלומר מטריצה ג'ורדן אפשר לכתוב בצורה כזו):

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & J_1 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

מה יקרה אם נעלה את המטריצה הזו בריבוע? זה כמו להעלות כל תיבה בריבוע.

מזה אנחנו מקבלים:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{J_0} & & \\ & e^{J_1} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{J_m} \end{pmatrix}$$

כלומר כדי לחשוב את האקספונט של מטריצת ג'ורדן, צריך לחשב את האקספוננט של כל תיבה - ואת זה עושים כמו שעשינו בדוגמא!

איך עשינו בדוגמא?
הייתה לנו תיבה ואנחנו הצגנו אותה בצורה הזו:

$$J_5 = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_k = \lambda I + Z$$

(סתם כתבנו J_5 כדי להדגיש שזה תיבה)
 Z^2 כאן לא יהיה שווה לאפס, אבל Z^k כבר כן יהיה שווה לאפס. (כלומר בדוגמא זה היה בריבוע כי גודל התיבה הייתה 2).

נעשה עכשיו דוגמא עבור מטריצה בגודל 3.

דוגמא

נסתכל על מערכת המשוואות שנוצרת על ידי המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

זו מטריצת ג'ורדן. אנחנו יודעים איך למצוא את e^A .

נכתוב תחילה את המערכת המתאימה למטריצה הזו:

$$\frac{dy_1}{dx} = \lambda y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \mu y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \mu y_3$$

טוב אז גם כאן אפשר לראות שאנחנו פשוט יכולים לפתור את זה גם בלי השיטה של המטריצות (לפתור קודם את השלישית בנפרד, וכנ"ל לראשונה. ואז אפשר את השניה).
 לדוגמא במקרה זה:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & 2\mu \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

אך את ? כבר חישבנו בדוגמא מתחילת השיעור. נחשב:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu I + Z$$

$$e^{xA} = \left(\begin{array}{c|c} e^{\lambda x I} & \\ \hline & e^{x(\mu I + Z)} \end{array} \right) = \leftarrow \begin{matrix} \text{ז'אנל ג'דולללל} \\ \text{מקור} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu x} & x e^{\mu x} \\ 0 & 0 & e^{\mu x} \end{pmatrix}$$

אז הרעיון הוא פשוט לחשב לפי בלוקים (את הבלוק השני חישבנו לפי הדוגמא שראינו קודם).

אז מה הפתרון במקרה זה? (זה שהם בת"ל זה ברור במקרה הזה)

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\mu x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ x e^{\mu x} \\ e^{\mu x} \end{pmatrix}$$

וכאן אנחנו רואים את ההצדקה לחפש בפתרון מהצורה x כפול הצורה, כאשר יש לנו שורש כפול. (כלומר כאשר אנחנו לא רוצים לפתור עם מטריצות אלא לנחש פתרון לפי צורה)

האם השיטה הזו תמיד תעבוד? e^{xA} תמיד אפשר להשתמש. השאלה עד כמה זה קשה לחשב את זה...

מזה ברור שצריך לחפש פתרון לא רק e^{cx} כפול וקטור קבוע, אלא e^{cx} כפול וקטור שיש בו גם x .

אם J היא מטריצה בצורת ג'ורדן הדומה ל- A אז:

$$A = P J P^{-1}$$

$$A^2 = P J P^{-1} P J P^{-1} = P J^2 P^{-1}$$

$$A^m = P J^m P^{-1}$$

(למעשה התכונה הזו לא קשואה לג'ורדן אלא לדמיון)
מזה נובע:

$$e^A = P e^J P^{-1}$$

אז יש לנו את e^{xA} אז כל עמודה היא פתרון. נסתכל על המטריצה $e^{xA} P$ מה העמודות במכפלה הזו? זה

מטריצת פתרונות כפול מטריצה קבועה. מה אנחנו יכולים להגיד על העמודות? הם גם פתרונות. כי כל עמודה במטריצה $e^{xA} P$ הזו היא קומבינציה לינארית של העמודות של המטריצה e^{xA} . (אפשר לבדוק לפי ההגדרה של מכפלת מטריצות).
זאת אומרת שזה $e^{xA} P$ הוא גם פתרון (כלומר מטריצת פתרונות, כלומר שהעמודות מהוות פתרונות). אם מטריצה P היא הפיכה אז $e^{xA} P$ עדיין יתן לנו פתרונות בת"ל.
בגלל הדבר הזה אנחנו יכולים להשתמש בצורת ג'ורדן. נראה איך אנחנו עושים את זה.

יש לנו: $A = PJP^{-1}$. ולכן:

$$e^A = P e^J P^{-1}$$

כעת:

$$e^{xA} P = P e^{xJ}$$



זו המשוואה הכי טובה. ממנה אנחנו יודעים איך למצוא פתרונות בצורה יעילה.
המטריצה השמאלית כל עמודה בה היא פתרון (זה מה שאמרנו במהלך הפסקה הקודמת). בשמאלי יש מטריצה אפשר לחשב - ג'ורדן שאנחנו יודעים איך עושים לה אקספוננט, וזה פשוט כפול מטריצה קבועה.

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} 1 & x & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

במקרה הקודם שלנו היה לנו:

אפשר להוכיח שאם התיבה היא מגודל 2 אז מקבלים עד פונקציה לינארית - קופסא מגודל שלוש עד פונקציה ריבועית וכו'. וזה הבסיס לכל הניחושים שלנו שעשינו בנושא.

כלומר אם יש לנו תיבה כזו: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ כשמעלים את זה בריבוע זה לא היה מתאפס, אלא רק Z^3

היה מתאפס. ואז בחישוב של המטריצה המעריכית אנחנו מקבלים גם x וגם x^2 .
כלומר זה (שיש תיבה בגודל 3) קורה כאשר λ הוא שורש בריבוי שלוש במקרה זה.

עכשיו נעשה את הדוגמא הזו כמו שעשינו קודם, בשימוש בפונקציה מעריכית.
הדוגמא היא:

$$\frac{dy_1}{dx} = \lambda y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \lambda y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \lambda y_3$$

נפתור ללא שימוש בפונקציה מעריכית. אנחנו מחפשים פתרון מהצורה: $e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$. מציבים ומקבלים

(אנחנו מדלגים על החישובים) שהפתרונות הם: $r_1 = \lambda, r_2 = \mu$ (כלומר רק 2 ע"ע!) ונקבל שהפתרונות עבורם הם:

$$\vec{\varphi}_1 = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_2 = e^{\mu x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אבל אין לנו פתרון שלישי מהצורה הזו (שהיא e^x כפול וקטור קבוע). זה כי μ הוא שורש עם ריבוי. מה שעשינו זה לחפש פתרון השלישי בצורה של פונקציה לינארית. לערך הכפול מצאנו רק פתרון אחד ואת השני נחפש מהצורה:

$$\vec{\varphi} = e^{\mu x} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + e^{\mu x} \cdot x \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ההסבר ללמה אנחנו מחפשים דווקא בצורה הזו זה מה שלמדנו היום - תיאוריה של פונקציה מעריכית. מהצורה של הפתרון e^{xA} ידוע שקיים פתרון כזה. לא ברור מה יותר קל האם לנחש פתרון מהצורה הזו או לחפש פונקציה מעריכית. קודם המטריצה הייתה נתונה בג'ורדן אז היה יחסית קל.

אז אנחנו מציבים את הניחוש הזה למערכת ומוצאים עוד פתרון.

הבה נעשה את ההצבה של הצורה החדשה שלנו ונמצא את הפתרון השלישי. יהיו לנו 3 שוויונות, אבל זה בשביל 6 נעלמים. בגלל שמופיע x ואנחנו נעשה השוואות מקדמים (כי השוויון שנכתוב יהיה שוויון בין פונקציות ואז המקדם של המעריכי צריך להיות המקדם של המעריכי והמקדם של x כפול מעריכי צריך להיות המקדם של x כפול מעריכי) נקבל למעשה 6 משוואות. נכתוב את הניחוש בצורה של קורדינאטות:

$$\varphi_1 = (\xi_1 + x\gamma_1)e^{\mu x}$$

$$\varphi_2 = (\xi_2 + x\gamma_2)e^{\mu x}$$

$$\varphi_3 = (\xi_3 + x\gamma_3)e^{\mu x}$$

ואז נציב במשוואה הראשונה (הכל כפול האקספוננט, כאן כבר צימצמנו)

$$\mu(\xi_1 + x\gamma_1) + \gamma_1 = \lambda(\xi_1 + x\gamma_1)$$

בגלל שזה שוויון בין פולינומים אנחנו משווים מקדמים ומקבלים (וגם מהעובדה ש- $\lambda \neq \mu$):

$$\xi_1 = \gamma_1 = 0$$

במשוואה השנייה:

$$\beta_2 + \mu(\xi_2 + \lambda \beta_2) = \mu(\xi_2 + \lambda \beta_2) + \xi_3 + \lambda \beta_3$$

ומזה מקבלים $\beta_2 = \xi_3$, $\beta_3 = 0$.
משוואה שלישית:

$$\beta_3 + (\xi_3 + \lambda \beta_3) \mu = \mu(\xi_3 + \lambda \beta_3)$$

ומזה מקבלים $\beta_3 = 0$.

בסך הכל הפתרון (נשים לב לדרגות החופש שיש לנו מהפתרון המשוואות ובחר $\delta_2 = \xi_3 = 1$ ונקבל

$$:\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{\psi}_3 = e^{\mu x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

אפשר לבחור ξ_2 שרירותי, אבל נשים לב שזה כבר פתרון קודם שמצאנו (זה כבר קרה לנו בתרגול האחרון, זו תופעה שתמיד תקרה אם נפתור נכון), ולכן הפתרון הכללי זה סתם ישנה את הקבוע. צריך להזהר לו להוסיף אותו כעוד קבוע שרירותי, כדי אנחנו צריכים לקבל רק 3 קבועים שרירותיים.