

16.3.09

מצ"ר 1 - שיעור 5

היום נלמד עוד שטח אפרימון משוואה דיפרנציאלית רגילה.
 נלמד גם משוואות מדויקות וזוהי אינטגרציה.
 בשיעור הבא נתחיל תאוריה לתקבור של קיום ויחידות של
 אפרימון של בעיה קושה.

משוואה מדויקת וזוהי אינטגרציה

נניח נתונה בעיה דיפרנציאלית עבור פונ' u של 2 משתנים.
 נניח נתונה פונ' $u(x, y)$, שהיא רציפה בסביבה של הנק'
 (x_0, y_0) וקיימות נגזרות חלקיות $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ רציפות באותה סביבה
 של (x_0, y_0) . אז ניתן אפרימון:

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(\rho)$$

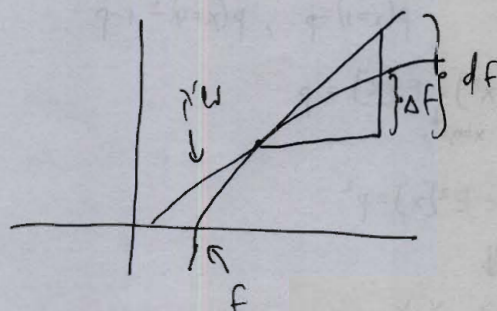
(נסימן: $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$)

הדיפרנציאל של u הוא האקספרסיה ב'מס' x, y של u בנקודה (x_0, y_0) .
 ב'מס' u :

$$du = u_x \Delta x + u_y \Delta y = u_x dx + u_y dy$$

עבור משתנים אחדים, ראונו את df כגורם כק:

זה נקרא
 "הדיפרנציאל של u "
 של u :



עבור פונ' של 2 משתנים, נסתכל על המישור המשיק לפונ'.

כעת, נניח כי נחלקי שאלה בצורה דיפרנציאלית:

$$\underline{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \quad (*)$$

ואם הגדולי האם $\underline{\hspace{2cm}}$ היא דיפרנציאל של איזו פונקציה $F(x,y)$?

באופן (ניסוח שקול), האם:

$$dF = Mdx + Ndy$$

נראה מה הוא התנאי שצריך להיות קיים על מנת שהשאלה תהיה כן:

נניח כי $u(x,y)$ קיימת נגזרות מסדר שני וציבור.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{סק:$$

עקרון הנגזרת
שהוא (גל) וציבור הנגזרת

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

בסעיף כ:

כעת נניח כי M, N הן בשלם נגזרות וציבור.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \stackrel{?}{=} M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \stackrel{?}{=} N$$

האם אלו הן האם:

אם, זה נכון, סק:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

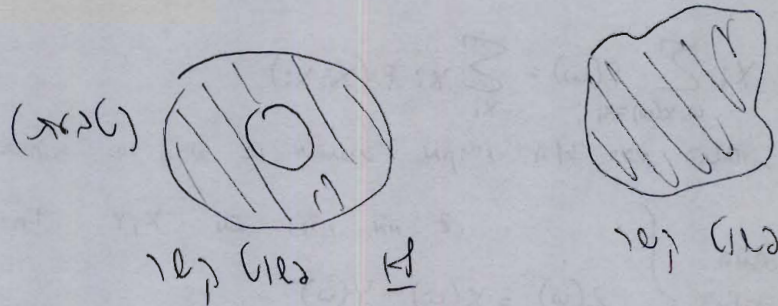
מה הפסוק שקיבלנו אומר?

וזה הוא התנאי של M ו- N שהשאלה $(*)$ היא נכונה.

באופן אחר, האם דיפרנציאל של איזו פונקציה?

התנאי שמצאנו הוא הנכתי ומספיק $\square$ (בהנחה שהנניסיון
 כזיכרון) בתחום D שהיא תחום ~~פשוט~~ פשוט קשר.

תחום פשוט קשר: תחום D חור.



שלב (א) קיים פתרון

נתונה השוואה:

$$M dx + N dy = 0$$

$\leftarrow$ $(*)$

$$D: a < x < b, c < y < d$$

בתחום D שהוא פתוח: $N(x,y) \neq 0$
 כן שבתחום זה: $N(x,y) \neq 0$
 השוואה היא שוואה מקו'ת, טומה:

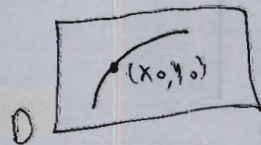
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

M, N זכירות ברצ'יות

אם כאן תנאי השבט. למד השבט:

בין δ נקודה $(x_0, y_0) \in D$ עבור קו אינטגרל אחד (יחיד).

טומה קיימת בנ' $y(x)$ כך $y(x_0) = y_0$.



(קו אינטגרל: פתרון $\circledast$ שטבר בוך הק' (x_0, y_0))

$\square$ (בהנחה) $\circledast$ תינתן, $\square$ בחז'א.

הסבר אף נמצא באג העות': u

$$u_x = M, \quad u_y = N$$

נניח נניח כן

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

וההק"מ:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \varphi(y) \quad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = M \right) \text{ (אינטגרציה ב- } x \text{)}$$

(הקבוע "גדול" הוא אינטגרציה ב- x אף על פי ש- x הוא הקבוע)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(s, y) ds + \varphi'(y) = N(x, y)$$

נניח
אם אינטגרל
הוא אינטגרל

לפי השוויון האחרון אנו מוצאים את $\varphi(y)$.
נעשה זאת באמצעות גזירה.