

מד"ר 1 – שיעור 26

אנחנו מדברים על מערכת משוואות לינאריות, כלומר:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$$

אנחנו נלמד היום בעיקר לפתור משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים (כלומר שהמטריצה A היא קבועה ולא תלויה ב- x . באופן עקרוני היא יכולה להיות).

אנחנו יודעים שאם מוצאים n פתרונות בת"ל (n - מספר המשוואות = סדר המטריצה) אז כל פתרון אפשר להציג כקומבינציה לינארית שלהם.

נסמן את הפתרונות ב- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ כאשר כל פתרון הוא סדרה של n פונקציות, כלומר כל φ_i הוא פונקציה וקטורית. למשל:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{1n}(x) \end{pmatrix}$$

כמו כן, נגדיר ורונסקיאן עבור סדרה של פונקציות וקטוריות:

$$W[\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n] = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1n} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

נרצה להגדיר e^A כאשר A היא מטריצה. למעשה באופן כללי אנחנו רוצים לראות איך אנחנו יכולים להגדיר $f(A)$ (כלומר פונקציה שתלויה במטריצה).

למשוואה $y' = ay$ אנחנו יודעים שהפתרון הוא ce^{ax} . המשוואה הזו מאוד מזכירה מה שיש לנו כאן: $y' = Ay$ כאשר A היא מטריצה - וזה המוטיבציה שלנו להגדרת e^A . אנחנו נרצה גם בטח להגיד ש:

$$\frac{de^{Ax}}{dx} = Ae^{Ax}$$

עכשיו נעשה את הכל מסודר.

הגדרות:

1. נורמה של מטריצה:

$$|A| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

מתאים להגדרה של הנורמה של וקטור שהגדרנו קודם (כלומר אם נסתכל על הוקטור כמטריצה בגודל $n \times 1$ זה יהיה מתאים). עבור פונקציה וקטורית, נקבל נורמה שתלויה ב- x :

$$|\vec{\psi}(x)| = \sum |\psi_k(x)|$$

לפי הגדרה זו אפשר לבדוק בקלות שהתכונות הללו מתקיימות:

$$|A+B| \leq |A|+|B|$$

$$|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$$

$$|A \cdot \vec{x}| \leq |A| \cdot |\vec{x}|$$

2. אקסופנט של מטריצה. אנחנו נגדיר את זה לפי טור (טיילור).
טור הפיתוח של e^t הוא:

$$e^t = 1 + t + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

ועכשיו נתסכל על:

$$I + A + A^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k + \dots$$

השאלה שעולה היא האם יש התכנסות. בשביל זה נתסכל על טור חלקי.
מה ההבדל בין מטריצות למספרים? שמטריצות יכולות להיות לא-חילופיות. אבל כיוון שמדובר רק על A והכפלות שלה בעצמה - הכפל במקרה שלנו הוא חילופי.
בשביל זה (הוכחת ההתכנסות) מספיק להוכיח שהביטוי הבא שואף בנורמה ל- 0 כאשר $l, m \rightarrow \infty$:

$$\left| \sum_{k=m}^l \frac{1}{k!} A^k \right| \xrightarrow{l, m \rightarrow \infty} 0$$

טוב זה לא מנוסח הכי טוב, אבל צריך להבין את הרעיון (שלכל m כשנשאף את l לאינסוף זה יתכנס ונקבל ביטוי של m . כעת נשאף את m לאינסוף ונרצה להוכיח שאנחנו מקבלים 0)

נראה זאת (אנחנו נשתמש בתכונות שראינו לגבי הנורמה שהגדרנו).

$$\text{נסתכל על: } \left| \sum_{k=m}^l \frac{1}{k!} A^k \right| \leq \sum_{k=m}^l \frac{1}{k!} |A|^k. \text{ זה נובע מ- } |A^k| \leq |A|^k.$$

וכעת, למה זה - $\sum \frac{1}{k!} |A|^k$ - שואף לאפס? נשים לב שזה טור של מספרים. אנחנו יודעים שהוא

מתכנס כי זה טור חלקי ל- $e^{|A|}$ (נשים זה אקספוננט בחזקת מספר).
הטור מתכנס לכל מטריצה A (על ידי שימוש בעובדה שאם במקום A נשים מספר - הטור תמיד מתכנס - כי זה טור שמהווה פיתוח של הפונקציה המעריכית).

איזה יופי בואו נכליל

באופן דומה - אפשר להגדיר לכל פונקציה אנליטית תהליך דומה. אנחנו לא צריכים את זה כאן, מספיק לנו רק ההרחבה של פונקציה מעריכית, זה רק שנדע במה אנחנו בדיוק מתעסקים. אפשר לעשות את זה לכל פונקציה שיש לה טור עם רדיוס התכנסות. במקרה הזה רדיוס ההתכנסות הוא ∞ ולכן זה מתכנס לכל מטריצה A.

דוגמא

נתסכל על:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

למה שווה e^A ?

נפתח את האיברים של הטור של זה.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

...

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

ולכן אנחנו מקבלים שהטור הוא:

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = I + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

אז בגדול הבנו את הרעיון. עכשיו השאלה היא איך משתשים ברעיון הזה של e^A .

הטענה שלנו: בעזרת מטריצה זו אפשר להגדיר לפתרון למערכת. אנחנו רוצים לבדוק האם:

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A \cdot e^{xA}$$

צריך להגדיר דבר ראשון מה זה נגזרת של מטריצה. אז נעשה את זה לפי ההגדרה שלנו לנגזרת:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[e^{(x+\Delta x)A} - e^{xA} \right] \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} B$$

השאלה שלנו האם קיים גבול כזה B. נוכיח את זה כעת, ואף נראה כי $B = Ae^{xA}$.

כל מה שאנחנו עושים עכשיו (לגבי הנגזרת) נכון לגבי מטריצות עם מקדמים קבועים. כמו כן, אנחנו משתמשים בעניין של קומוטטיביות של המטריצות (כי מדובר רק על מטריצה אחת).

על סמך השוויון המתאים למספרים, ניתן להראות כי:

$$e^{(x+\Delta x)A} = e^{xA} e^{\Delta x A}$$

(מוכיחים את זה לפי השוואת המקדמים של טור הטיילור של אגף ימין ואגף שמאל).

על סמך זה אפשר לכתוב (כלומר אפשר לכתוב וזה אפילו יהיה נכון!)

$$e^{(x+\Delta x)A} - e^{xA} = e^{xA} (e^{\Delta x A} - I) = e^{xA} \left[\Delta x A + \frac{(\Delta x)^2 A^2}{2!} + \dots \right]$$

את זה אנחנו צריכים לחלק ב- Δx ולעבור לגבול. כלומר השאלה עכשיו היא האם קיים גבול:

$$\frac{1}{\Delta x} e^{xA} \left[\Delta x A + \frac{(\Delta x)^2}{2!} A^2 + \dots \right] = e^{xA} \cdot A + e^{xA} \left[\frac{\Delta x}{2!} A^2 + \dots \right]$$

המחובר השני שואף ל-0 כאשר $\Delta x \rightarrow 0$.

הוכחת לזה היא על ידי השוואה עם טור מספרים (כי הנורמה שואפת לאפס על ידי השוואת עם טור מספרים). נכתוב את זה בצורה פורמלית:

$$\left| e^{xA} \left[\frac{\Delta x}{2!} A^2 + \frac{\Delta x^2}{3!} A^3 + \dots \right] \right| \leq e^{x|A|} \left(\frac{|\Delta x|}{2!} |A|^2 + \frac{|\Delta x|^2}{3!} |A|^3 + \dots \right) \rightarrow 0$$

אנחנו יכולים להשוות עם טור המספרים בגלל שאנחנו מתעסקים עם מטריצה ואחת והיא חילופית עם עצמה. בסך הכל אנחנו מקבלים כי:

$$\frac{de^{Ax}}{dx} = A e^{Ax}$$

(והסיבה שיכולנו להעביר את A [הרי מה שקיבלנו בהוכחה זה $\frac{de^{Ax}}{dx} = e^{Ax} A$] לצד שמאל זה בגלל ש- e^{Ax} זה טור של A וכפל שלה עם עצמה, ולכן e^{Ax} חילופי עם A).

כל זה היה נכון רק עבור מטריצה A על איברים קבועים בתוכה.

איך באופן פרקטי אנחנו משתמים בזה בשביל פתרון של המערכת?

פתרון המערכת הוא וקטור. בשביל זה אנחנו צריכים לעבור קודם לשוויון האחרון שלנו שהיה שוויון בין מטריצות, שיהיה שוויון וקטורי.

כשגוזרים את המטריצה אנחנו מקבלים מטריצה עם עמודות (כמו כל מטריצה, יש לה עמודות). נתסכל על איך אנחנו לדוגמא מקבלים את העמודה הימנית של $(e^{Ax})'$:

$$\begin{pmatrix} (e^{xA})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{xA} \end{pmatrix}$$

אנחנו משתמשים רק בעמודה הימנית של e^{Ax} . עמודה ב- $(e^{Ax})'$ היא צירוף לינארי (כי A מטריצת מספרים) של אותה העמודה ב- e^{Ax} . ולכן כל עמודה במטריצה e^{Ax} מהווה פתרון למשוואה שלנו.

כלומר אם אנחנו יכולים לחשב את e^{Ax} אנחנו בעצם מצאנו n פתרונות (כל העמודות שלה).

אז מצאנו דרך לפתור מערכת משוואת לינאריות עם מקדמים קבועים! פשוט מחשבים את e^{Ax} ! הבעיה היא שלמצוא את המטריצה הזו זה לא תמיד פשוט. אבל זה פשוט במקרה שהמטריצה היא בצורת ג'ורדן.

בשיעור הבאה נעשה כמה תרגילים לגבי מטריצה שנתונה בצורת ג'ורדן - ונראה מסקנות לגבי מטריצה כללית.

לגבי מבחן

היום יכתבו באתר כמה תרגילי בית כמבחן לדוגמא.

במבחן יהיו 5 שאלות - מתוכן צריך לעשות 4. צורת המבחן תהיה בסגנון של ביאלי (יהיו חישובים, וחלק שאלות תיאורטיות, נצטרך משהו להוכיח, לאו דווקא דברים שהוכחנו בכיתה, אבל כנראה דברים שקשורים לזה).