

מד"ר 1 – תרגול 9

התרגול נתעסק עם משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים.

תרגיל 1

נתונה המשוואה: $y'' + y' + y = 0$. כעת נרצה לצרף תנאי התחלה, כמה אנחנו צריכים? 2. אז נניח כי:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

אם יש משוואה כזו אפשר לזכור את כל הנוסחאות, אבל לא צריך, מספיק לזכור שאנחנו מחפשים פתרון מהצורה: $y = e^{rx}$. נציב בנוסחא שלנו:

$$r^2 e^{rx} + r e^{rx} + e^{rx} = 0 \quad /: e^{rx}$$

$$r^2 + r + 1 = 0$$

מה השורשים של המשוואה הזו?

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(נשים לב שהמשוואה עבור r היא בעלת מקדמים ממשיים, ולכן לכל פתרון אמור להיות פתרון צמוד, כמו שיצא לנו)

עכשיו נכתוב את הפתרון בצורה:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} = c_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + c_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x} = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cdot e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + c_2 \cdot e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x} \right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + i c_1 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - i c_2 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \left((c_1 + c_2) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + i(c_1 - c_2) \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \end{aligned}$$

(בפיתוח כאן השתמשנו בנוסחת אוילר ובעובדה שקוסינוס היא זוגית וסינוס היא אי-זוגית)

עכשיו נרצה לבחור c_1, c_2 כאלה: $c_1 = c_2 = 0.5$ ואז נקבל:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

וכעת נבחר $c_1 = -c_2 = 1/(2i)$ ונקבל:

$$y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

אז קיבלנו 2 פתרונות, והן לא תלויות לינארית, ולכן הן בסיס - כלומר כל פתרון y אפשר לכתוב בצורה:

$$y = A y_1 + B y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$$

לא צריך לכתוב את כל הדברים האלה כשאנחנו פותרים תרגילים, מה שצריך לזכור זה שכאשר הפתרון למשוואה הריבועית עבור r הוא מרוכב, אם נסמן:

$$r_1 = a + bi \quad r_2 = a - bi$$

אז הפתרון הכללי למשוואה הוא:

$$y = e^{ax} \left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx \right)$$

למעשה לא היינו חייבים לעשות את זה ויכולנו להשאיר עם הפתרון הכללי שמכיל קצת קבועים מרוכבים. (בתרגיל הבא זה מה שנעשה לדוגמא)

כעת לתנאי ההתחלה. מה שעלינו למצוא את שני הקבועים A ו-B:

$$y(0) = 1 \cdot (A + 0) = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$y'(0) = \left[e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(-A \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \right] \Big|_{x=0}$$

$$= -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

ולכן בסך הכל הפתרון הוא:

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$$

הערה

כל מה שאנחנו אומרים לגבי משוואות לינאריות מסדר שני נכון למשוואות לינאריות מכל סדר (עם מקדמים קבועים). למשל אם תהיה משוואה ממעלה חמישית, נקבל פולינום ממעלה חמישית (נסמן את פתרונותיו ב- r_i עבור) ואז הפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$y = e^{r_1 x} + e^{r_2 x} + e^{r_3 x} + e^{r_4 x} + e^{r_5 x}$$

אם חלק מהשורשים אותו דבר, נניח: $r_1 = r_2$ וכל השאר שונים נקבל:

$$y = e^{r_1 x} + x \cdot e^{r_1 x} + e^{r_3 x} + e^{r_4 x} + e^{r_5 x}$$

וכך כנ"ל לגבי כל ריבוי שהוא (ריבוי של 3 יכפיל את האיבר השלישי ב- X^2 וכו')

תרגיל 2

נתונה המשוואה (עם תנאי התחלה)

$$y'' + i y' + 2y = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = i \end{cases}$$

ושב כמו קודם נסמן את הפתרון ב- $y = e^{rx}$ ונקבל את הפולינום: $r^2 + i r + 2 = 0$. כעת

הפתרונות:

$$r_{1,2} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{-1-8}{4}} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{-9}{4}} = -\frac{i \pm 3i}{2}$$

$$r_1 = i \quad r_2 = -2i$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$y = A \cdot e^{ix} + B \cdot e^{-2ix} = A \cos x + B \cos 2x + i(A \sin x + B \sin 2x)$$

אי אפשר פה לבחור A ו-B כך שיהיה פתרון ממשי (המקדמים של המשוואה המקורית לא היו ממשיים). ולכן כדי למצוא את הפתרון למשוואה עם תנאי ההתחלה, ישירות נעבוד עם הפתרון הכללי הזה:

$$y(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$y'(0) = [iAe^{ix} - 2iB e^{-2ix}]|_{x=0} = iA - 2iB = i \Rightarrow A - 2B = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

ובסך הכל הפתרון שלנו הוא:

$$y = \frac{e^{ix} - e^{-2ix}}{3}$$

מציאת שורשים למספר מרוכב

נניח שאנחנו רוצים למצוא את $\sqrt{\alpha + i\beta}$. נכתוב $\sqrt{\alpha + i\beta} = a + bi$, והמטרה שלנו זה למצוא a ו- b . נעלה בריבוע:

$$\alpha + i\beta = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

כעת החלק הממשי שווה לחלק המדומה, כלומר מקבלים את המערכת:

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2 \\ \beta = 2ab \end{cases}$$

ונפתור אותה:

$$b = \frac{\beta}{2a} \Rightarrow \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2} \Rightarrow a^4 - \alpha a^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

את המשוואה האחרונה אפשר לפתור (זו משוואה ריבועית עבור a^2) - ומקבלים 4 פתרונות. אבל רגע! אנחנו יודעים שיש 2 שורשים מסדר 2 ולא 4... אז נכון - בפתרון המשוואה הזו נקבל רק 2 פתרונות (שניהם עם ריבוי 2)

עוד שיטה - להציג את המספר בצורה פולרית:

$$\alpha + i\beta = R \cdot e^{i\varphi}$$

ואז:

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \sqrt{R} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}, \sqrt{R} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}$$

ואפשר להשתמש בנוסחא:

$$e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)} = -e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

(ודאו שאתם מבינים אותה) ואז רואים שהפתרונות נגדיים אחד לשני כמו שציפינו.