

מד"ר 1 – שיעור 17

אנו ממשיכים בנושא משוואות דיפר' לינאריות מסדר שני.
מגדירים את האופרטור L (הוא מוגדר על פונ' שיש להן שתי נגזרות):

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

והמשוואה $Ly = f(x)$ היא משוואה לא הומוגנית והמשוואה $Ly = 0$ היא משוואה הומוגנית.

נציג שוב בצורה מסודרת את המשוואה ההומוגנית:

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

אנחנו בעיקר בקטע של למצוא פתרון כללי למשוואה לינארית הומוגנית ואנחנו יודעים שכדי למצוא פתרון כללי למשוואה הומוגנית (משוואה (1)) אנחנו צריכים למצוא מערכת בסיסית - כלומר מערכת של 2 פתרונות בלתי תלויים (באיזה שהוא קטע, נניח (α, β)) והיא בסיס למרחב הפתרונות למשוואה (1).

זה אומר שכל פתרון $y(x)$ אפשר להציג בצורה: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

המטרה שלנו היא לחפש את הפתרונות האלה. עוד מעט נתחיל עם משוואות עם מקדמים קבועים, בינתיים אם ידוע פתרון אחד למשוואה (1) נראה איך למצוא פתרון שני (זה בעיקר חשוב למקדמים לא קבועים).

מציאת פתרון שני מראשון

אם למשוואה (1) יש פתרון אחד (ניחוש, הגיע מניסיון וכו') ידוע $y_1(x)$ [פתרון שאינו טריוויאלי!]. מחפשים שני על ידי ההצבה: $y = y_1(x)v(x)$. y_1 ידוע ואנחנו נקבל משוואה עבור v (שהיא תהיה משוואה לינארית, שאין בה איבר עם v). בסך הכל מקבלים (את הפיתוח עשינו בסוף שיעור שעבר):

$$y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' = 0$$

המשוואה הזו היא משוואה מסדר ראשון, נסמן $z = v'$ ונקבל:

$$y_1 z' + (2y_1' + p y_1) z = 0$$

זו משוואה לינארית מסדר ראשון ואותה אנחנו יודעים לפתור.

מוצאים את z , ממנו את v ואז: $y_2 = y_1 \cdot v$.

שאלה: האם y_1, y_2 הם מהווים צמד בסיסי? מה צריך לבדוק? האם הם בלתי תלויים. איך אנחנו בודקים את זה? אז אפשר לבדוק ורונסקיאן, או פשוט לנסות לחפש קבועים (נגיד להניח שיש ולהראות שמזה נגיע לכך שהקבועים הם 0 ו-0) - וכך נעשה את זה.

אז אנחנו מחפשים קבועים c_1, c_2 כך ש:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \quad (c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$$

נבצע כמה פיתוחים:

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + c_2 y_2 &= 0 \\ y_1 + c \cdot y_2 &= 0 \\ y_1 + c y_1 \cdot v &= 0 \\ 1 + c \cdot v &= 0 \Rightarrow v = -\frac{1}{c} \end{aligned}$$

האם זה יכול להיות? רק כאשר $v = -\frac{1}{c}$, כלומר כאשר v הוא קבוע. איך נראה שזה לא יכול להיות?

אנחנו יודעים ש- $v = \int z + c$ וצריך לבדוק ש- z לא מתאפס (כי כדי ש- v יהיה קבוע צריך ש- z

יתאפס זהותית). אנחנו יודעים ש- z הוא פתרון למשוואה $y_1 z' + (2y_1' + p y_1) z = 0$ ולכן z הוא

(פתרון משוואה לינארית הומוגנית) ולכן הוא אינו מתאפס באופן זהותי. $z = e^{-\int \frac{2y_1' + p y_1}{y_1}} \neq 0$

סיכום

אם יש לנו פתרון אחד, אנחנו יודעים למצוא עוד פתרון שיחד איתו הם מהווים צמד בסיסי ובכך מגיעים לפתרון הכללי למשוואה (=קומבינציה לינארית שלהם).

לא צריך לזכור את כל הפיתוחים, מה שצריך לזכור: פתרון שני מחפשים על ידי ההצבה:

$$y(x) = y_1(x) \cdot v(x)$$

כעת אנחנו עוברים לפתרון מקרה כללי (לא הכי כללי).

משוואות לינאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים

המשוואה שאנחנו מסתכלים עליה היא:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

אז יש כבר כמה דוגמאות שאנחנו מכירים, למשל $y' + y = 0$ (הפתרון עבור זה הן הפונ' $\sin, \cos$ - זה מערכת \ צמד בסיסי, והפתרון הכללי הוא קומ' לינארית שלהם).

עוד דוגמא: $y'' - y = 0$ ופונ' שיש לה את התכונה הזו היא פונ' מעריכית, ושתי הפתרונות הם e^x, e^{-x} ,

הם צמד בסיסי, והפתרון הכללי הוא $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

על סמך הנסיון הזה, אנחנו מחפשים פתרון למשוואה כללית עם מקדמים קבועים. לפני שנתחיל נזכיר שאנחנו מחפשים 2 פתרונות בלתי תלויים.

ננסה להציב $y = e^{rx}$ (כלומר לנחש פתרון) ונקבל:

$$(ar^2 + br + c) \cdot e^{rx} = 0$$

כדי שזה יתאפס צריך שמה שבתוך הסוגריים יתאפס, כלומר:

$$ar^2 + br + c = 0$$

כלומר r הוא פתרון למשוואה ריבועית. לפולינום הזה קוראים "פולינום אופייני". נסמן אותו ב- $p(r)$ ואנחנו

מחפשים מת: $p(r) = 0$ וזה יהיה שקול למתי $L(e^{rx}) = 0$, כלומר מתי $y = e^{rx}$ הוא פתרון

(תזכורת, L הוא: $L y = ay'' + by' + cy$).

למשוואה ריבועית יכולים להיות עד 2 פתרונות. אנחנו יודעים ש:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

וכעת נבצע חלוקה לשלוש מקרים.

מקרים

1. יש 2 שורשים ממשיים - $r_1 \neq r_2$ ואז $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ הם 2 פתרונות. שוב עולה השאלה האם הם בלתי תלויים. אפשר לבדוק את זה באמצעות ורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \cdot e^{(r_1 + r_2)x}$$

וזה שונה מאפס כי פונ' מעריכית הוא שונה מאפס ו- $r_1 \neq r_2$.

יכולנו גם להוכיח את זה בלי ורונסקיאן, על ידי נסיון למצוא את הקבועים ולראות שהם יוצאים 0:

$$\begin{aligned} c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} &= 0 \\ c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x} &= 0 \end{aligned}$$

אם אחד הקבועים לא יהיה 0, משמעות הדבר שפונ' מעריכית היא פונ' קבועה.

איך נראה הפתרון בצורה גרפית? אם שני הקבועים שניהם חיוביים או שניהם שלילים, אז הפתרון עולה מעריכית או יורד מעריכית בהתאמה.

2. כאשר יש פתרון ממשי אחד:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$$

מה התכונה של פולינום אם יש לו שורש כפול? נגזרת שלו לפי r שווה לאפס בנקודת ההתאפסות:

$$p(r_1) = 0 \Rightarrow \frac{dp(r)}{dr} = p'(r) \Big|_{r=r_1} = 0$$

אז אנו יודעים ש- $L(e^{r_1 x}) = 0$ - ו- $L(e^{rx}) = p(r) \cdot e^{rx}$ אז יש לנו כאן פונ' של 2 משתנים, נקח נגזרת חלקית לפי r :

$$\frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} = L\left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r}\right) = L(xe^{rx})$$

מה הולך כאן?! איך חישבנו את זה?!

את הנגזרת אפשר להכניס לתוך האופרטור, ובגלל שכל הנגזרות חלקות \ רציפות אפשר להחליף את סדר הגזירה:

$$\frac{\partial}{\partial r} [a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx})] =$$

$$a \left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} \right)'' + b \left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} \right)' + c \left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} \right)$$

כלומר הנוסחא שהשתמנו בה באופן סמוי היא:

$$\frac{\partial (e^{rx})_{xx}}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} \right)$$

למה גוזרים לפי r ? אנו יודעים ש- $y = e^{r \cdot x}$ הינו פתרון. המטרה לנו זה למצוא פתרון נוסף ובדרך הזו אנחנו מקבלים עוד פתרון שהוא נגזרת לפי r . כלומר הטענה שלנו היא ש- $x e^{r_1 x}$ הוא פתרון השני. נראה זאת.

אז אנחנו מקבלים:

$$L(e^{rx}) = p(r) \cdot e^{rx} \Rightarrow \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [p(r) e^{rx}] = p'(r) e^{rx} + p(r) x e^{rx}$$

עבור $r=r_1$ נקבל:

$$p'(r_1) e^{r_1 x} + p(r_1) x e^{r_1 x} \equiv 0$$

$\begin{matrix} p'(r_1) & \rightarrow & 0 \\ p(r_1) & \rightarrow & 0 \end{matrix}$

קבילנו ש- $x e^{r_1 x}$ זה פתרון למשוואה, וזה הוא הפתרון השני.

בסך הכל, במקרה של שורש כפול הפתרונות הם: $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}$. ברור שהם בת"ל (ודאו שזה גם ברור לכם).

נזכור שזה יתבסס על כך שיכולנו להחליף סדר גזירה.

משהו מעניין

היינו יכולים לחפש פתרון שני באותה דרך מהתחילת השיעור (באמצעות זה שידוע ש- $e^{r_1 x}$ הוא פתרון ואז מסמנים: $y_2 = v \cdot e^{r_1 x}$ ומכאן היינו מגיעים לפתרון השני)

3. כאשר הדטרמיננטה (מה שבתוך השורש) הוא שלילי.

נסמן את 2 הפתרונות למשוואה הריבועית (אנחנו יודעים שאם יש לנו פתרון, אז גם הצמוד שלו הוא פתרון - כי המקדמים של הפולינום הם ממשיים):

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad r_2 = \lambda - i\mu$$

כעת צמד הפתרונות הוא: $e^{(\lambda+i\mu)x}, e^{(\lambda-i\mu)x}$ והפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 \cdot e^{(\lambda-i\mu)x}$$

אלה הם פתרונות לא ממשיים.

אנחנו מעדיפים פתרון ממשי (כי התחלנו עם מקדמים ממשיים ובאופן כללי זה יותר כיף), ולכן נחפש קומבינציה שלהם שתביא לפתרון ממשי. לשם כך, נשתמש בנוסחת אוילר:

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) = e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \sin \mu x$$

זה הוא פתרון למשוואה (כלומר: $\mathcal{L}(\underbrace{e^{(\lambda+i\mu)x}}_v) = 0$). בגלל שהמשוואה היא עם מקדמים ממשיים -

החלק הממשי וגם החלק המדומה מהווים פתרון.

למה אם יש פונ' שהיא פתרון אז גם הצמודה שלה היא פתרון? נראה זאת:

$$\begin{aligned} a v'' + b v' + c v &= 0 \\ \hline a v'' + b v' + c v &= 0 \\ a \bar{v}'' + b \bar{v}' + c \bar{v} &= 0 & (\text{מכאן } \overline{v'} = (\overline{v})') \\ a(\bar{v})'' + b(\bar{v})' + c \bar{v} &= 0 & (\overline{a v''} = a(\bar{v})'') \end{aligned}$$

ולמה חלק ממשי ומדומה הם פתרונות?

נניח כי הפתרון שלנו הוא $V = V_1 + iV_2$ ואז:

$$L_V = 0 \Rightarrow L_V = L_{V_1} + L(iV_2) = L_{V_1} + iL(V_2) = 0$$

$\uparrow$
 גזר שהקצ'ים
 ממש"ם

$\parallel 0$
 כי חלק מקומה שוא
 חלק מקומה א 0
 וחלק משי שוא חלק
 משי א 0.

ולכן 2 פתרונות ממשיים (נקח את החלק המדומה ואת החלק המרוכב):

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$$

יכולנו לקבל את 2 הפתרונות האלה גם בדרך אחרת. נסתכל על (אנחנו יודעים שזה פתרון כי זה קומבינציה לינארית של הצמד הבסיסי המקורי שלנו):

$$\frac{e^{(\lambda+i\mu)x} + e^{(\lambda-i\mu)x}}{2} = e^{\lambda x} \cos \mu x$$

עבור הפרש במונה נקבל את הפתרון השני (וצריך איזה חילוק ב- i או משהו)

האם הפתרונות האלה ($e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$) הם בלתי תלויים? כן. אם נסתכל על הקומבינציה הליארית, החלק המעריכי יצטמצם ונשאר אם השאלה הם $\sin$ ו- $\cos$ הם בת"ל - וזה אנחנו יודעים שכן. כמו כן, אפשר גם לבדוק עם ורונסקיאן (וזה יותר מומלץ, כי קומבינציה עבור 2 זה עוד יחסית קל, אבל כשיש הרבה פונ' יותר מסודר לעשות את זה עם ורונסקיאן).

אפשר גם להשתמש ביכולות המרוכבות שלנו ולהראות ששתי הפתרונות הראשונים שמצאנו הם בת"ל באמצעות ורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} e^{(\lambda+i\mu)x} & e^{(\lambda-i\mu)x} \\ (\lambda+i\mu)e^{(\lambda+i\mu)x} & (\lambda-i\mu)e^{(\lambda-i\mu)x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} (-2i\mu) \neq 0$$

סיכום

יש לנו את המשוואה $a y'' + b y' + c y = 0$.

וצמדי הפתרונות הם (חלוקה למקרים):

$$\begin{array}{ll} 1) & b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \\ 2) & b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow e^{r_1 x}, x \cdot e^{r_1 x} \\ 3) & b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow e^{\lambda x} \cdot \cos \mu x, e^{\lambda x} \cdot \sin \mu x \end{array}$$

דוגמאות

דוגמא 1

נשים לב במקרה האחרון יש תכונה של תנודות.

המשוואה: $y'' + 4y = 0$ ופתרון ל- p הם $r_{1,2} = \pm 2i$ ולכן הצמד עבור המשוואה:
הצבה, גזירה והצבה, ופתרון מערכת של 2 משוואות לינאריות מקבלים $\cos 2x, \sin 2x$. כעת נניח שיש לנו בעיה קושי - כלומר נוסיף את התנאים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

אז צריך למצוא את הקבועים עבור $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, כך שתנאי ההתחלה יתקיים. אחרי

הצבה, גזירה והצבה, ופתרון מערכת של 2 משוואות לינאריות מקבלים $y = \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$.

לזכור!

מספר התנאים בבעיית קושי שווה לסדר של המשוואה.
בפתרון הכללי למשוואה מספר הקבועים השרירותיים הם כסדר המשוואה.

דוגמא 2

המשוואה: $y'' + y' + y = 0$

במקרה הזה, הפתרון למשוואה הריבועית p : $r = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

לכן הפתרון הכללי למשוואה הוא:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

זה שונה מהדוגמה הקודמת כי יש לנו מקדם מעריכי ששואף לאפס - אז לא משנה מה הקבועים, הפתרון שואף לאפס באינסוף ולא־אינסוף במינוס אינסוף, כלומר:

$$\begin{aligned} |y| &\rightarrow 0, (x \rightarrow +\infty) \\ |y| &\rightarrow \infty, (x \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

איך נראה הפתרון הזה?

אם נתונה באופן כללי קומבינציה לינארית של $\sin$ ו- $\cos$ נוכל לכתוב את זה בצורה אחרת כדי להבין יותר טוב איך נראה הפתרון (כלומר איך לצייר את הגרף של הפתרון הזה):

$$a_1 \cos bx + a_2 \sin bx = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left(\underbrace{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}_{\alpha} \cdot \cos bx + \underbrace{\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}_{\beta} \sin bx \right)$$

נשים לב ש- $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (אנחנו דאגנו לזה) ולכן נוכל להשתמש בזהות:

$$\alpha \cos bx + \beta \sin bx = \sin(bx + \varphi)$$

(כאשר $\alpha = \sin \varphi$
 $\beta = \cos \varphi$) אנחנו מוצאים בצורה הבאה:

בסך הכל נראה כך:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sin(bx + \varphi)$$

כעת נוכל לצייר את הגרף הזה של דוגמא 2, שזה פשוט סינוס שדועך לאפס באינסוף (וגדל בצורה מעריכית בשאיפה למינוס אינסוף).