12.3.09

מד"ר 1 - תרגול 2

לא יהיה בוחן. המתרגל יבדוק באופן אקראי עבודה של שת"ם.
אם מגישים בזוג, לרשום באיזה קבוצה (15 ל 14-15 זו
קבוצה ראשונה, האחרת שניה).

התרגול נפתור מספר משוואות ליניאריות ממעלה 1.

תרגיל:

$$y'(x)+2x\cdot y(x)=x$$

זו משוואה ליניארית מדרגה 1.

1) תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית: $y'(x)+2xy(x)=0$

$$y'=-2xy \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y}=-2x\,dx$$

(*) עבור $y\not\equiv 0$.

$y\equiv 0$ הוא פתרון (הצבה: $0'+2x\cdot 0=0$)

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx \Rightarrow \ln|y|=-x^2+\ln c$$

(כדי שיהיה יותר נוח)

פתרון למשוואה ההומוגנית: $y=c\cdot e^{-x^2}$ (כאן c יכול להיות או חיובי או שלילי)

2) נתייחס ל-c כפונקציה של x:

$$y=c\cdot e^{-x^2}=c(x)\cdot e^{-x^2}$$

$$y'=c'e^{-x^2}+c\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

כעת נציב במשוואה הנתונה בשאלה:

$$y' + 2xy = c'e^{-x^2} - 2xce^{-x^2} + 2xce^{-x^2} = c'e^{-x^2} = x$$

וזו המשוואה המקורית   מצטמצם! תמיד יקרה, זה לא מקרה פרטי כאן. (אם נפתור את ההומוגנית נכון...)

$$c' = xe^{x^2} \Rightarrow c = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + D$$

לכן פתרון למשוואה לא הומוגנית (כלומר פתרון לתרגיל):

$$y = ce^{-x^2} = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + D\right)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + De^{-x^2}$$

($y \equiv 0$ אינו פתרון למשוואה הלא הומוגנית כי $0' + 2x \cdot 0 \neq x$)

כעת נניח כי יש לנו גם תנאי התחלה: $y(0) = 0$

נציב:

$$y(0) = \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$$

בסה"כ הפתרון:

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right)$$

אם נסתכל על התרגיל שוב ניתן לראות שיכולנו לפתור אותו ע"י הפרדת משתנים. (אבל לא נורא, התאמנו במשוואות ליניאריות...)

<u>תרגיל:</u>

$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$

זו לא משוואה ליניארית, אבל יש כאן הצבה פשוטה שתהפוך אותה להיות ליניארית:[*]

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}$$

(בהנחה: $x \neq 0$, $y \not\equiv 0$)

נגדיר: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$

$$\Rightarrow y' = z + xz' = \frac{3z^2-1}{2z}$$

$$xz' = \frac{3z^2-1}{2z} - z = \frac{3z^2-1-2z^2}{2z} = \frac{z^2-1}{2z}$$

קיבלנו משוואה שניתן לפתור ע"י הפרדת משתנים:

$$\frac{2z}{z^2-1}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1}\,dz = \ln|z^2-1| = \ln|x| + \ln c$$

$$z^2-1 = cx \quad \Rightarrow z = \pm\sqrt{1+cx}$$

$$\Rightarrow y = xz = \pm x\sqrt{1+cx}$$

אם והיה לנו תנאי התחלה, נוכל למצוא c, ואחת משורשים רק.

<u>אבחנה</u>:

$$x \cdot \underline{\underline{2yy'}} = 3\underline{\underline{y}}^2 - x^2$$

מה הקשר בין y^2 ל- $2yy'$? זה הנגזרת שלו!!

נוכל לסמן:

$$z = y^2$$

$$x\,(y^2)' = 3y^2 - x^2$$

$$xz' = 3z - x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{3}{x}z = -x$$

ויש לנו עוד דרך לפתור את התרגיל (כמובן תביא אותו פתרון).

משוואת ברנולי

משוואה מהצורה:

$$y' + p(x)y = g(x)\cdot y^{\alpha}$$

נשים לב שבלי y^{α} זו משוואה לינארית.

אם $\alpha = 1$ יש לנו משוואה לינארית הומוגנית.

אם $\alpha = 0$ יש לנו משוואה לינארית אי-הומוגנית (טוב, למעשה אם $g \equiv 0$ אז גם הומוגנית...)

לכן נניח מעתה ש: $\alpha \neq 0, 1$.

נסמן:

$$z = y^{1-\alpha}$$

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

נכפול את משוואת הברנולי ב: $(1-\alpha)y^{-\alpha}$

$$\underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{z'} + (1-\alpha)p(x)\underbrace{y^{-\alpha}y}_{z} = (1-\alpha)g(x)y^{-\alpha}y^{\alpha}$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

קיבלנו משוואה לינארית!

מכל הסמוך הזה, מספיק לזכור $z = y^{1-\alpha}$ ואת השאר אפשר לגזור.

תרגיל:

$$y'(x) = \frac{2}{x}y + \frac{x}{y^2} = \frac{2}{x}y + xy^{-2}$$

במקרה הזה, יש משוואת ברנולי ו- $\alpha = -2$.

לכן נגדיר:

$$z = y^{1-\alpha} = y^3$$

$z' = \underbrace{3y^2}_{} y'$

נכפול את המשוואה בזה ← (ובדרך נעביר משהו אגף)

$\underbrace{3y^2y'}_{z'} - \frac{2}{x}\cdot \underbrace{3y^2 y}_{z} = 3x\underbrace{y^2 y^{-2}}_{1}$

$z' - \frac{6}{x}\cdot z = 3x$

ומכאן פותרים כרגיל.

~~אם נפתור עכשיו עם מהלך הפתרון נתחיל נקבל:~~ $\cancel{\mu(x) = e^{\int -\frac{6}{x}dx} = x^{-6}}$

בגלל שאנחנו אנשים של הגולים, נפתור בכל זאת לא כרגיל אלא בדרך אחרת ומשה!

נגדיר ונחשב: $\underbrace{\text{(נתעלם מהקבוע)}}_{\text{גורם מאינטגרציה}}$

$\mu(x) = e^{\int -\frac{6}{x}dx} = x^{-6}$

נכפול את המשוואה ב- x^{-6}:

$x^{-6}z' - 6x^{-7}z = 3x^{-5}$

נשים לב שאגף שמאל הוא למעשה $(x^{-6}\cdot z)'$!

כלומר:

$(x^{-6}z)' = 3x^{-5}$

$x^{-6}z = \int 3x^{-5}\,dx = -\frac{3}{4}x^{-4} + c$

$z = -\frac{3}{4}x^2 + cx^6$

$y = \sqrt[3]{cx^6 - \frac{3}{4}x^2}$

וכעת יש לנו עוד שיטה לפתור משוואה לינארית לא-הומוגנית.