

מד"ר 1 – תרגול 11

בתרגיל 10 יש טעות בשאלה 4, המשוואה אמורה להיות $y'' + by' + cy = 0$. עם שני הנתונים הנוספים: $b < 0, c > 0$.

נפתור את הגרסה הנכונה של השאלה. כמו שאנחנו כבר יודעים, אנחנו רוצים למצוא פתרון מהצורה e^{rx} . אנחנו מקבלים את המשוואה עבור הפולינום האופייני:

$$r^2 + br + c = 0$$

הפתרונות עבור המשוואה הזו הם:

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא (צירוף לינארי של הצמד הבסיסי שנובע מפתרון המשוואה עבור הפולינום האופייני):

אם מה שבתוך השורש הוא ממשי, אז 2 הפתרונות למשוואה הם חיוביים (נובע מהנתונים על b ו- c). במקרה האחר, בו מה שיש בשורש שלילי, נקבל:

$$y = Ae^{\frac{-b}{2}x} \cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}x\right) + Be^{\frac{-b}{2}x} \sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}x\right)$$

נזכר בגבול מיוחד: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x = 0$.
זה קורה כי הפונקציה המעריכית "יותר חזקה" מ- x .

אז יש לנו כמה דברים שאנחנו צריכים לעשות היום. אנחנו מתחילים מבעיה פשוטה מאוד.

נתונה המשוואה:

$$\frac{dx}{dt} = x' = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x$$

אז תחילה אנחנו צריכים למצוא את הערכים העצמיים של המטריצה, כלומר לפתור את המשוואה:

$$|A - \lambda x| = 0$$

אז:

$$|A - \lambda x| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1(-1) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = 0$$

מזה אנחנו מקבלים כי $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

צריך למצוא 2 ע"ע אבל יש לנו רק שורש אחד. נשים לב שזה מקרה שעוד לא עשינו בהרצאה, ומיד נראה מה עושים במצב כזה...

ננסה למצוא את הוקטור העצמי:

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז יש לנו 2 משוואות:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שהמשוואות האלו הן שקולות. ולכן נוכל לבחור כל x_2 שנרצה ומזה נקבל x_1 . נבחר $x_1 = 1$.
ונקבל $x_2 = -1$. (זה קורה כל כל כפולה של ו"ע היא ו"ע).

כלומר וקטור עצמי ראשון שלנו הוא:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

איך אנחנו יכולים למצוא את הוקטור השני? אנחנו נחפש וקטור מהצורה, שיהווה את הפתרון הנוסף מהצורה:

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{\eta} t e^{2t}$$

נציב במשוואה שלנו ($x' = Ax$) ונקבל:

$$\vec{\eta} e^{2t} + 2\vec{\eta} t e^{2t} = A\vec{\eta} t e^{2t}$$

אנחנו רוצים למצוא η כך שהניחוש שלנו יהיה פתרון? האם זה אפשרי? כן.

מה קורה אם $t=0$? אגף ימין שווה לאפס. זה קורה גם למחובר השני באגף השמאלי. כמו כן $e^{2t} = 1$ במקרה זה. מכל זה נובע ש- $\vec{\eta} = \vec{0}$ (וקטור האפס). לא ממש טוב - קיבלנו פתרון טריוויאלי...

לכן נצטרך ניחוש אחר שיהיה צירוף יותר מורכב.

מה שקורה כאן מזכיר את זה שכשיש לנו פונקציה לדוגמה $\sin$, ואנחנו רוצים לחפש פונקציה מהצורה. אם ננחש $\sin(x)$ זה הרבה פעמים לא יעבוד. ואז ננחש משהו כמו $A\sin(x) + B\cos(x)$ (כאילו ה"צורה" הכללית של $\sin$ היא לא $A\sin(x)$ אלא $A\sin(x) + B\cos(x)$)

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{\eta} t e^{2t} + \zeta e^{2t}$$

זה הנסיון השני שלנו. נציב ונראה אם נקבל משהו שיכול להיות הפתרון השני שאנחנו מחפשים.

$$\vec{\eta} e^{2t} + 2\vec{\eta} t e^{2t} + 2\zeta e^{2t} = A\vec{\eta} t e^{2t} + A\zeta e^{2t}$$

מה מזה אנחנו מקבלים? אנחנו מקבלים:

$$\underline{\vec{\eta} e^{2t}} + \underline{2\vec{\eta} t e^{2t}} + \underline{2\zeta e^{2t}} = \underline{A\vec{\eta} t e^{2t}} + \underline{A\zeta e^{2t}}$$

(סימנו איברים שהם מוכפלים ב- e^{2t} ואיברים שמוכפלים ב- $t e^f$, על מנת להשוות מקדמים עוד מעט. נזכור שזה הוא שוויון של פונקציות ולכן אנחנו עושים את זה)

מהאיברים שצריך להכפיל ב- e^{2t} ומהאיברים שצריך להכפיל ב- $t e^{2t}$, צריך להתקיים (כדי שיהיה שוויון פונקציות, שוויון מקדמים):

$$te^{2t}(A\vec{\eta}-2\vec{\eta})=te^{2t}(A-2I)\vec{\eta}=0$$

$$e^{2t}(\vec{\eta}+2\vec{\zeta}-A\vec{\zeta})=0$$

אז יש לנו את שתי המשוואות:

$$(A-2I)\vec{\eta}=0$$

$$(A-2I)\vec{\zeta}=\vec{\eta}$$

מהמשוואה הראשונה אנחנו מקבלים $\vec{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

זה נבע מזה שכבר יש לנו פתרון אחד. מהמשוואה השנייה (וזה כל הרעיון שלנו, אנחנו מנסים להשריץ עוד משוואה כדי שיהיה לנו עוד מידע):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כלומר את שתי המשוואות:

$$-y_1 - y_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = -1$$

אז נבחר $y_1 = k$ ונקבל כי

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ובסך הכל הפתרון השני שלנו הוא:

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{\eta} t e^{2t} + \vec{\zeta} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

נזכר מה הוא הפתרון הראשון שמצאנו:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

נשים לב שהמחובר השלישי בפתרון השני הוא למעשה כפולה של הפתרון הראשון, ולכן כאשר נותנים את הפתרון הכללי אפשר פשוט להתעלם ממנו (למעשה אפילו צריך, כדי שלא יהיו לנו 3 משתנים שרירותיים בפתרון).

אז עכשיו אפשר להגיד ששני הפתרונות הבסיסיים שלנו הם:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

אפשר גם לנחש

עוד דוגמא קלאסית למצב שבו יש שני שורשים שווים. אם יש לנו מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

איזה פתרונות אנחנו מקבלים פה? (אשר המשוואה היא כמובן $x' = Ax$)
שוב, שני השורשים יהיו שווים (ול-1). אבל אנחנו יודעים שיש לנו 2 וקטורים עצמיים בת"ל שהם:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מה אנחנו לומדים? שלפעמים לא באמת צריך לפתור אלא פשוט להתסכל על המטריצה ולחפש לה שני

וקטורים עצמיים בת"ל.

רק כדי לסגור את הדוגמא הזו, 2 הפתרונות שלנו למשוואה הם:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

למה כאן יכולנו לעשות את זה בצורה פשוטה ומקודם היה ממש מסובך? כי זו היא מטריצה לכסינה. הקודמת לא הייתה כזו (ולכן היינו יכולים לעבור רק לצורת ז'ורדן [שכל מטריצה אפשר להעביר אליה] – שהיא כאילו לכסינה, אבל יש גם מספרים באלכסון מעל האלסון הראשי). בשיעור אנחנו נלמד את זה יותר מסודר.