

מד"ר 1 – שיעור 16

בשיעור שעבר התחלנו לדבר על משוואות לינאריות מסדר שני. הגדרנו צמד של פתרונות והתחלנו לדבר על תלות לינארית. נזכיר את הסוף:

תלות לינארית

אומרים ש- $F(x)$ ו- $g(x)$, תלויות לינארית ב- $\alpha < x < \beta$ אם קיימים שני קבועים c_1, c_2 שלא שניהם שווים לאפס, כך ש- $c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) \equiv 0$ עבור כל x בקטע: (α, β) .

משפט

אם $F(x)$ ו- $g(x)$ גזירות ב- $\alpha < x < \beta$ ואם $W\{F, g\}|_{x_0} \neq 0$ (כך ש: $\alpha < x_0 < \beta$) אז $F(x), g(x)$ בלתי תלויות לינארית.

הוכחה

נבנה קומבינציה לינארית כך ש: $c_1 F_1(x) + c_2 F(x) \equiv 0$. נגזור ונקבל את 2 המשוואות:

$$\begin{aligned} c_1 F_1(x) + c_2 F(x) &\equiv 0 \\ c_1 F_1'(x) + c_2 F'(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

נציב כעת $x=x_0$ בשתי המשוואות. נתבונן המערכת שקיבלנו, של שתי משוואות (לינאריות הומוגניות), עבור שני קבועים, c_1, c_2 (שימו לב! משוואות לינאריות עבור מספרים, לא עבור פונקציות!). נשים לב שזה בדיוק הורונסקיאן, ונתון שהוא שונה מאפס:

$$\det \begin{pmatrix} F_1(x_0) & F_2(x_0) \\ F_1'(x_0) & F_2'(x_0) \end{pmatrix} = W\{F, g\}|_{x=x_0} \neq 0$$

אם יש מערכת לינארית הומוגנית שהדט' שלה שונה מאפס, זה אומר שהפתרון היחיד שהיא מאפשרת זה הפתרון הטריטיוויאלי, ולכן: $c_1=c_2=0$, ולכן $F(x), g(x)$ בלתי תלויות לינארית.

משפט (אותו אחד בניסוח קונטרה-פוזיטיבי):

אם $f(x), g(x)$ תלויות לינארית אז: $W\{f, g\} \equiv 0$ עבור כל x בקטע (α, β) .

הוכחה

נתבונן בקומבינציה הלינארית:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \equiv 0 \quad (c_1, c_2 \neq 0)$$

ולכן:

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &\equiv 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

מה אנחנו רואים? יש לנו מערכת של שתי משוואות [עבור כל x] (הומוגניות ביחס ל- c_1, c_2) וידוע שהיא מאפשרת פתרון לא טריוויאלי [שוב! עבור כל x] (כי הקבועים לא שניהם אפס) - ולכן הדט' שלה שווה לאפס: (וזוה גם במקרה הורונסקיאן)

$$\det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = 0 \quad (\forall x) \Rightarrow W\{f, g\} \equiv 0$$

הכיוון ההפוך

הכיוון ההפוך אינו נכון באופן כללי.

אם $W\{f, g\} \equiv 0$ זה לא מבטיח ש- $f(x), g(x)$ הן תלויות לינאריות. דוגמא:
נסתכל על

$$\begin{cases} f(x) = x \cdot |x| \\ g(x) = x^2 \end{cases} \quad (-1 < x < 1)$$

נחשב את W :

$$W(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot |x| & x^2 \\ 2|x| & 2x \end{vmatrix} = 2x^2|x| - 2x^2|x| \equiv 0$$

אבל בכל זאת פונ' הללו הן בלתי תלויות לינארית. ננסה לבנות את הקומבינציה הלינארית. נקח את:

$$c_1 x|x| + c_2 x^2 \equiv 0$$

וננסה לחפש את הקבועים.

אם $x > 0$ (חיובי) אז:

$$c_1 x^2 + c_2 x^2 \equiv 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

אם $x < 0$ (שלילי) אז:

$$-c_1 x^2 + c_2 x^2 \equiv 0 \Rightarrow -c_1 + c_2 = 0$$

קיבלנו שתי משוואות עבור הקבועים:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

הדט' של המערכת:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

ולכן ניתן לאפס את הפונ' רק כאשר $c_1 = c_2 = 0$. לכן הפונ' הללו הן בלתי תלויות לינארית. (כמובן, אפשר היה לוותר על הדט' ופשוט לנסות לפתור את 2 המשוואות לראות שרק הפתרון הטריוויאלי מתקבל)

עצב מהול בשמחה

אז בצורה כללית, אם ורונסקיאן של שתי פונ' הוא אפס זה לא מבטיח שהן תלויות לינארית, אבל עבור משוואות דיפ' זה דווקא כן תמיד קורה!

משפט

אם $f(x) = y_1$ ו- $g(x) = y_2$ הם פתרונות של המד"ר $L[y] = 0$ (כלומר $L[y_1] = 0$ ו- $L[y_2] = 0$) אז y_1, y_2 תלויות לינארית אם ורק אם $W\{y_1, y_2\} = 0$.

הוכחה

אז כיוון אחד הוכחנו בהתחלה למקרה הכללי. נראה שהכיוון השני (שראינו שהוא לא מתקיים באופן כללי) כן מתקיים כאן.

כלומר, נוכיח שאם $W\{y_1, y_2\} = 0$ אז y_1, y_2 תלויות לינארית. נוכיח זאת בשלילה.

נניח ש- $W\{y_1, y_2\} = 0$ אבל y_1, y_2 הן בלתי תלויות לינארית. כעת נבדוק האם זה אפשרי (רמז: לא). תהי $x = x_0$ (כלומר נקח נקודה כל שהיא) בה $W(x_0) = 0$ (למעשה אנחנו יודעים שאם זה קורה בנק' אחת זה קורה בכל התחום, אבל זה לא ממש משנה לנו עכשיו). לכן המערכת:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

מאפשרת פתרון לא טריוויאלי c_1, c_2 שלא שניהם אפס. נשתמש בקבועים האלה ונקח את הקומבינציה (ונסמן אותה):

$$\psi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

וכעת (כי L הוא אופרטור לינארי):

$$L[\psi] = L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$$

מה הערך בנקודה x_0 ? והנגזרת?

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ \psi'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

כלומר פתרון פ' מקיים את תנאי ההתחלה שערך הפתרון בנקודה x_0 הוא אפס והנגזרת בנקודה x_0 היא אפס.

המשוואה הזו:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

תמיד מאפשרת פתרון טריוויאלי.

לפי משפט קיום ויחידות נובע ש: $\psi(x) \equiv 0$. (כי הוא מקיים את 2 תנאי ההתחלה, ואנחנו יודעים שיש יחיד כזה).

במילים אחרות: $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$ (עבור c_1, c_2 שלא שניהם שווים לאפס) ולכן הפונ' (שני הפתרונות) y_1, y_2 תלויות לינארית.

והגענו לסתירה עבור הנחת השלילה שלנו.

נסכם (סיכום ביניים)

ראינו כי המושג של תלות לינארית הוא מאוד קשור לרעיון של צמד בסיסי של פתרונות כאשר מדובר על משוואה דיפר. הסיכום שלנו יהיה משפט שקילות.

נניח כי $L[y_1] = 0$ ו- $L[y_2] = 0$, אז 4 הטענות הבאות שקולות (כלומר כל אחת גוררת את שלושת האחרות):

1. y_1, y_2 הם צמד בסיסי של פתרונות.
2. y_1, y_2 בלתי תלויות לינארית.
3. $W\{y_1, y_2\} \neq 0$ בלפחות נקודה אחת ב- (α, β) .
4. $W\{y_1, y_2\} \neq 0$ עבור כל איקס בקטע (α, β) .

מספיק תיאוריה, נעבור לדברים יותר טכניים.

הורדת סדר של המד"ר $L[y] = 0$

נניח ש $y_1(x)$ הוא אחד הפתרונות של המד"ר $L[y] = 0$ (הכוונה לפתרון לא טריוויאלי - כלומר $y_1(x) \neq 0$). נסמן: $y(x) = v(x)y_1(x)$. כעת נתרגם את המשוואה להיות משוואה עבור פונ' v .

צריך לעשות קצת אלגברה - אז נכין קודם את ההצבות שלנו:

$$\begin{aligned} y(x) &= v(x)y_1(x) \\ y' &= v'y_1 + vy_1' \\ y'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \end{aligned}$$

נציג כעת במשוואה שלנו:

$$\begin{aligned} (v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + p(v'y_1 + vy_1') + q(vy_1) &= 0 \\ v(y_1'' + py_1' + qy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''(y_1) &= 0 \\ \underbrace{v(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} + v'(2y_1' + py_1) + v''(y_1) &= 0 \\ v'' \cdot y_1 + v' \cdot (2y_1' + py_1) &= 0 \end{aligned}$$

נשים לב ש- v לא מופיעה, אלא רק הנגזרות שלה, v' ו- v'' . ולכן אם נסמן: $V' = W$ נקבל משוואה מסדר ראשון, אותה אנו יודעים לפתור.

בשיעור הבאה נחזור על החלק הזה שוב, ונזכיר עליו כמה דברים.