11.3.09

מד"ר 1 - שיעור 4

שיעור שעבר למדנו על הדיפרנציאל. בינת"ים ההגדרה שלנו הייתה של דיפרנציאל של פונ' של משתנה אחד. השיעור נרחיב את ההגדרה.

נזכר בהגדרה: df - החלק הלינארי של Δf.

$$dy=f'(x)dx$$

עבור $y=f(x)$

וכשמחלק ב-dx נראה שזה מתלכד עם הסימון שלנו לנגזרת.

שיטת הפרדת משתנים (שוב)

נתונה המשוואה:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

נזכר שאמרנו שאם יש y_0 עבורו $g(y_0)=0$ אז $y=y_0$ הוא פתרון למשוואה. (נקרא לזה "פתרון סינגולרי")

כעת נניח כי יש קטע בו g אינו מתאפס. נכתוב את המשוואה כך:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \qquad (*1)$$

משוואה זו היא בצורה דיפרנציאלית (נוח להסביר אח"כ).

[תזכורת: משוואה בצורה דיפרנציאלית זו משוואה מהצורה:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$]

נניח כי $G(y)$ היא פונ' הקד"מ $G'(y)=\frac{1}{g(y)}$, ולכן:

$$G(y)=\int\frac{1}{g(y)}dy \quad , \quad F(x)=\int f(x)dx$$

מ-(*1) נובע כי:

$$dG(y)=dF(x)$$

ולכן: $G(y) = F(x) + c$

(בדיקה זוכר'ם: (למעשה לוקחים דיפרנציאל) $\left(G'(y)dy = F'(x)dx \right.$

אז איזה משוואות דיפ' אנו יודעים לפתור עד כה?

1) $y' = F(x)$

2) $y' = g(y)$

3) $y' = F(x)\cdot g(x)$ (הפרדת משתנים, סוג של הכללה של 1 ו-2)

כעת נוסיף עוד סוג:

4) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

למשוואה זו קוראים "הומוגנית" (לא להתבלבל עם "לינארית הומוגנית", זו לא
עכשיו נלמד לפתור משוואות הומוגנית. חייבת להיות לינארית!)

דוגמאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y}, \qquad x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

שיטה לפתרון למשוואה הומוגנית:

נתונה המשוואה:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

נבצע החלפת משתנים:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$$

וכעת:

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u$$

וכעת יש לנו משוואה מסוג 3, ואותה נפתור ע"י הפרדת משתנים:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\left(f(u) - u\right)$$

(ה-9 משוואה מסוג 3 הוא מכאן $f(u)-u$)

כעת נרצה לחלק ב-$(f(u)-u)$ [כחלק מפתרון בשיטת הפרדת משתנים)

ושוב יש להיזהר בכך שיתכן כי: $f(u)-u \equiv 0$ ואז אנו מקבלים:

$\downarrow$

(אם קיימת נק' u_0 כך ש: $f(u_0)=u_0$)

פתרון אפשרי ל-u: $u \equiv u_0$. כלומר: $y = u_0 \cdot x$.

נמשיך בפתרון: נניח כי $u \neq u_0$, נוכל לחלק:

(עבור נק' שאינה, כלומר ש-u הוא לא זהותית u_0)

$$\frac{1}{f(u)-u}\, du = \frac{dx}{x}$$

דוגמא: פתור את המשוואה:

$$x\frac{dy}{dx} = x+y$$

פתרון: משוואה זו היא הומוגנית, נסמן:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux, \quad y' = xu' + u$$

וכעת יש לנו: (נציב u ו-u')

$$xu'x + ux = x + ux$$

$$x^2u' = x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + c$$

ולכן:

$$y = x(\ln|x| + c)$$

(פה אין פתרון סינגולרי, לא חילקנו כאן!)

שימו לב בפתרון יש רק משתנה שרירותי אחד (c)!

אם יש לנו יותר, כנראה עשינו טעות!

כעת נלמד לפתור עוד סוג משוואה דיפ':

5) $y' = f(ax+by+c)$

אז איזה שינוי משתנים כדאי לעשות? מה שבתוך הסוגריים:

$z = ax+by+c \Rightarrow z' = a + by' = a + b\cdot f(z)$

כלומר:

$z' = a + b\cdot f(z)$

זו משוואה מסוג 2! $(y' = g(y))$

נמשיך לנושא חדש:

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

המשוואה: $y' + a(x)\cdot y = b(x)$

(שימו לב המקדמים לא קבועים הם פונ' של x. כאן נוכל לפתור בצורה. בהמשך, במשוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר גבוה יותר, אין דרך כללית עם מקדמים לא קבועים, וכשנגיע לשם נפתור רק עבור מקדמים קבועים)

(*) כאשר: $a(x), b(x) \in C^1[\alpha,\beta]$.

נסמן: $Ly = y' + a(x)\cdot y$ (L הוא אופרטור, לא ממש ברור עכשיו מה זה לעסוק ~~[illegible]~~, נבין בהמשך)

ונקבל:

$Ly = b$

אם $b=0$ נקבל משוואה ליניארית הומוגנית. אחרת המשוואה ליניארית לא הומוגנית (וגו'..).

[כלומר $b(x) \equiv 0$]

נניח ש-$y_p(x)$ הוא פתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגנית, ו-y_0

*הוא פתרון (לאו דווקא כללי) למשוואה ההומוגנית, אז y_p+y_0 הוא פתרון למשוואה הלא-הומוגנית.

$$\begin{aligned} Ly_p &= b \\ Ly_0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad L(y_p+y_0)=b$$

ממה זה נובע? מהלינאריות של האופרטור L (לינאריות לפי y).
הגדרה של אופרטור לינארי (נסמן ב-L את האופרטור):

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1Ly_1+c_2Ly_2$$

למה האופרטור L שלנו הוא לינארי?

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=(c_1y_1+c_2y_2)'+a(x)(c_1y_1+c_2y_2)=$$

$$=c_1y_1'+c_2y_2'+a(x)(c_1y_1+c_2y_2)=$$

$$=c_1(y_1'+a(x)y_1)+c_2(y_2'+a(x)y_2)=$$

$$=c_1Ly_1+c_2Ly_2$$

כמה תכונות שנובעות מהלינאריות:

1. $Ly_p=b,\ Ly_0=0 \quad \Rightarrow L(y_p+y_0)=b$
2. $Ly_0=0, \quad \Rightarrow L(cy_0)=cLy_0=0$
3. $Ly_{p,1}=b,\ Ly_{p,2}=b \quad \Rightarrow L(y_{p,1}-y_{p,2})=b(x)-b(x)=0$

אז איך בעצם פותרים משוואה לינארית מסדר ראשון?

לדוגמא, נתונה המשוואה: $y'+xy=\sin x$

אז המשוואה הלינארית ההומוגנית המתאימה לה היא: $y'+xy=0$

אז כעת נפתור את המשוואה: $y' + a(x)y = b(x)$

ניקח את המשוואה ההומוגנית המתאימה לה: $y' + a(x)y = 0$

איך נפתור אותה? הפרדת משתנים! $y' = -a(x)\cdot y$

נשים לב ש: $y \equiv 0$ הוא תמיד פתרון, הוא נקרא הפתרון הטריוויאלי.

כעת נניח כי $y \not\equiv 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} a(s)ds + C$$

(*)

אז הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית:

$$y = C_1 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

וכעת נוכל להתעלם מהפתרון הטריוויאלי, כי הוא חלק מהפתרון הכללי שמצאנו (עבור $C_1 = 0$).

סיימנו את השלב הראשון (פתרון המשוואה ההומוגנית המתאימה), וכעת נחזור לא-הומוגנית: $y' + ay = b$

נשתמש ב"שיטת וריאציה של מקדמים" (במקרה זה של "מקדם").

המקדם עליו מדובר הוא C_1 במקרה זה.

מה השיטה? מחפשים פתרון למשוואה הלא הומוגנית מהצורה:

$$z = C(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \quad (*)$$

(בהמשך נראה שזה עובד, בנתיים תאמינו)

$$c'(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + c(a)\left[-a(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\right] + a\cdot(x)\cdot c(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x)$$

מצטמצם כצפוי

אנו חייבים למצוא את $C(x)$.

$$c'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x)$$

$$c'(x) = b(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} b(\sigma)e^{\int_{x_0}^{\sigma} a(s)ds}\, d\sigma + c_1$$

ולכן הפתרון הכללי עבור המשוואה הלא-הומוגנית:

$$\underbrace{z(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\int_{x_0}^{x} b(\sigma)e^{\int_{x_0}^{\sigma} a(s)ds}\, d\sigma}_{\text{זה הפתרון הפרטי} \to y_p} + \underbrace{C_1\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}}_{\text{הפתרון הכללי עבור ההומוגנית}} \qquad (*)$$

$$+\ C_1 y_0$$

לפי התכונה השלישית שנבעה מהלינאריות אלה הם ב הפתרונות

ולכן זה הוא הפתרון הכללי למשוואה הלא-הומוגנית.

כעת נוכל להוסיף לאוצר מה שאנו יודעים לפתור:

ב) משוואת ליני'

זה כמובן לא מספיק לנו מאחר ואנו חמדנים ונרצה להוסיף לרשימה:

ג) משוואות מדוייקות

אך תמיד נרחיב את ההגדרה של דיפרנציאל:

דיפרנציאל של כמה משתנים

נתונה הפונ': $u(x,y)$

• הגדרת הנגזרת החלקית: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}$

(וכנ"ל עבור $\frac{\partial u}{\partial y}$)

סימון: $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$

כלל:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)=u_x(x,y)\Delta x+u_y(x,y)\Delta y + o(|\Delta x|+|\Delta y|)$$

(*) נניח שניתן לכתוב את $u(x+\Delta x, y+\Delta y)$ כך.

אזי (בהנחת (*)) נסמן:

$$du=u_x\Delta x+u_y\Delta y$$

אזי ניתן להגיד כי:

$$\Delta u = du + o(|\Delta x|+|\Delta y|)$$

כלומר du הוא "החלק העיקרי" בשינוי u ביחס ל-Δx ו-Δy.

(*) מתקיים כאשר: $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ רציפות (זה מספיק אך לא הכרחי)

$$\Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

ל-du נקרא הדיפרנציאל של הפונ' u.

בשיעור הבא נתעסק במשוואות מהצורה:

$$u_x\,dx+u_y\,dy=0$$

כזו תיקרא משוואה מדויקת.