

מד"ר 1 – שיעור 25

מערכות לינאריות – מרחב וקטורי ממימד n

אנחנו חוזרים למערכות, אנחנו בקטע של התאוריה הכללית של מערכות לינאריות. נזכר בזה ואז נלמד פתרון למערכת עם מקדמים קבועים. לגבי משפט הקיום והיחידות - בינתיים אנחנו משתמשים בו (מקבלים אותו כנתון), בשיעור הבא נחזור אליו ונגיד עליו כמה דברים.

אז אנחנו מדברים על מערכת לינארית שהמקדמים הם פונקציות רציפות. אנחנו מסתכלים על המערכת בצורה וקטורית:

$$(1) \quad \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}$$

כאשר: $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ואז (בהנתן ש- a_{ij} הם איברי המטריצה A) אנו מקבלים את מערכת המשוואות:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sum a_{1j} y_j$$

$\vdots$

$$\frac{dy_n}{dx} = \sum a_{nj} y_j$$

ואנחנו מניחים ש- a_{ij} הן פונקציות רציפות של x בקטע (a, b) (קטע כלשהוא, אבל כולם אותו קטע, ואנחנו נדבר על פתרון בקטע זה).

למדנו בשיעור שעבר טענה: מרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי (נבע מלינאריות הנגזרת, ולינאריות ההכפלה המטריצה – ולכן סכום פתרונות הוא פתרון וכו'). כעת אנחנו צריכים למצוא בסיס - מערכות יסודיות. זה בדיוק מה שעשינו במשוואה מסדר ראשון - מצאנו פתרון אחד, מסדר שתיים - מצאנו 2 פתרונות בסיסיים וכו'.

עוד טענה משיעור שעבר: מימד המרחב הוא n (מספר המשוואות במערכת), או באופן שקול - המימד של הוקטור y . כדי להוכיח את זה אנחנו קודם מוצאים איזה שהוא בסיס של n פתרונות ומוכיחים שבעזרת הבסיס הזה אפשר לבנות כל פתרון כקומבינציה לינארית. זה יהיה מאוד דומה למה שעשינו למשוואה מסדר n . נראה זאת.

נסתכל על:

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{\psi}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

אלה הם וקטורים בלתי תלויים.

מכיוון שאנחנו מדברים פה על פונקציות וקטוריות אי אפשר להשתמש ישירות במשפטים מאלגברה על וקטורים - אנחנו יכולים להשתמש בהם רק עבור הפונקציות בנקודה מסוימת (ואז אלה הם וקטורים של מספרים).

אז הוקטורים שאנחנו הצגנו הם קבועים, ונוכל להגיד שהם למעשה ערך של פונק' בנקודה מסוימת - כלומר הם תנאי ההתחלה:

$$\vec{\psi}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{\psi}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_0 \in (a, b)$$

לפי משפט הקיום קיימים n פתרונות:

$$\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$$

שמקיימים את (1) ואת תנאי ההתחלה:

$$\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_n(x_0)$$

נרצה להראות שהם בלתי תלויים. נרצה להראות שאם לכל $x \in (a, b)$:

$$c_1 \vec{\varphi}_1(x) + \dots + c_n \vec{\varphi}_n(x) = 0$$

אז כל ה- c-ים אפסים. אז נראה זאת (כי זה מה שאנחנו רוצים לעשות).

בגלל שזה נכון לכל x בקטע, זה אמור להיות גם נכון עבור x_0 . שם (בנקודה זו) הם וקטורים בת"ל (של מספרים) ולפי אלגברה לינארית המקדמים חייבים להיות 0. מ.ש.ל.

כעת לגבי פריסה - האם כל פתרון $y(x)$ אפשר להציג בצורה:

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\psi}_i(x)$$

אנחנו יודעים שצריך להתקיים:

$$\vec{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\psi}_i(x_0)$$

נתסכל על ערך הפתרון בנקודה x_0 :

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ונסתכל על הפונקציה הזו (ונסמן אותה ב- $\psi(x)$):

$$\sum_{k=1}^n b_k \vec{\psi}_k(x) = \vec{\psi}(x)$$

$\psi(x)$ הוא פתרון (כי הוא קובינציה לינארית של פתרונות).

כעת נתסכל על ערכי הפונ ψ ב- x_0 :

$$\vec{\psi}(x_0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{y}(x_0)$$

מהיחידות (זו כבר בעית קושי, כי אנחנו מבקשים שהפתרון יקיים את תנאי ההתחלה ב- x_0) [ונשים לב שביקשנו שתנאי ההתחלה יהיה מה שהוא כבר מקיים] אנחנו מקבלים ש: $\vec{y} \equiv \vec{\psi}$.

בזה הוכחנו ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הם בסיס ולכן מימד המרחב הוא n .

אם נמצא בסיס אחר יתכן שהגודל שלו יהיה אחר? לא. באלגברה אנחנו יודעים את זה עבור וקטורים של מספרים. לנו יש פונ' - אבל נוכל להתסכל עליה בנקודת ההתחלה ואז להשתמש באלגברה.

נשים לב: מה שהראינו עכשיו (שזה מרחב לינארי ממימד n) נכון לגבי מקדמים רציפים (כלומר לאו דווקא מקדמים קבועים כמו שנלמד לפתור בהמשך השיעור).

מסקנה: כדי למצוא את כל הפתרונות, מספיק למצוא n פתרונות בת"ל.

פתרון מערכות לינאריות עם מקדמים קבועים

נזכר מה למדנו עבור פתרון משוואה מסדר n עם מקדמים קבועים - הפתרון הוא פונקציה מעריכית, כלומר חיפשנו פתרון מהצורה e^{rx} .

האם אפשר לעשות משהו דומה עבור מערכת? כן. גם כאן נוכל לחפש פתרון מהצורה: e^{xA} כאשר A היא מטריצה. (ואיבריה $A = a_{ij}$) כמובן שנצטרך תחילה להגדיר את זה. את כל זה נעשה בשיעור הבא, השיעור נתעסק יותר עם דוגמאות.

דוגמא

המטריצה שלנו היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נזכר ב- (1) [המשוואה הראשונה בשיעור]. אז מה המערכת שלנו?

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + y_2$$

השיטה היא שמחפשים פתרון (וקטור, 2 פונקציות) כפונקציה מעריכית:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{rx} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

האם יצא משהו מזה? נתחיל להציב ונראה:

$$\vec{y}' = A \vec{y}$$

$$\vec{y}' = A e^{rx} \vec{\xi}$$

$$\vec{y}' = e^{rx} A \vec{\xi}$$

אז מצד אחד, כדי שתנאי (1) יתקיים. מצד שני - למה $\vec{y}'$ שווה (נגזור את הניחוש שלנו)?

$$\vec{y}' = r e^{rx} \vec{\xi}$$

ולכן כדי שיהיה פתרון צריך שיתקיים:

$$r e^{rx} \vec{\xi} = e^{rx} A \vec{\xi}$$

$$A \vec{\xi} = r \vec{\xi} \quad (&)$$

הניחוש שלנו הוא (נציג אותו בצורה לא וקטורית):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{rx} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = e^{rx} \xi_1, \quad y_2 = e^{rx} \xi_2$$

כלומר כדי ש- (&) יתקיים צריכות להתקיים שתי המשוואות:

$$\begin{cases} r e^{rx} \xi_1 = e^{rx} (\xi_1 + \xi_2) \\ r e^{rx} \xi_2 = e^{rx} (4\xi_1 + \xi_2) \end{cases}$$

אז התנאי הוא למעשה ש- r הוא ערך עצמי של המטריצה, והתנאי כדי שזה יתקיים הוא:

$$|A - rI| = 0$$

ובסך הכל אנחנו צריכים לחפש פתרון ל:

$$A \vec{\xi} = r \vec{\xi}$$

$$\Downarrow$$

$$|A - rI| = 0$$

אז:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-r)^2 - 4 = 0 \\ 1-r = \pm 2 \\ r_1 = -1, \quad r_2 = 3 \end{cases}$$

אז קיבלנו 2 ערכים עצמיים ומהם נוכל למצוא את 2 הוקטורים העצמיים. האם הפתרון שמתאים לע"ע -1 והוקטור שמתאים לע"ע 3 הם בת"ל? כן, לפי משפט מאלגברה.

נתסכל תחילה על $r_1 = -1$ ונקבל (ע"י הצבה במשוואה):

$$\begin{cases} (-1) \xi_1 = \xi_1 + \xi_2 \\ (-1) \xi_2 = 4\xi_1 + \xi_2 \end{cases} \Rightarrow \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -2$$

2 המשוואות האחרונות הן מערכת למציאת הוקטור העצמי. זו היא מערכת של 2 משוואות אלגבריות (אין פה פונקציות, ξ_1, ξ_2 הם מספרים) - היא הומוגנית, אז כדי שיהיה פתרון לא טריויאלי צריך הדט' תהיה שווה לאפס.

אז הפתרון הראשון הוא:

$$\vec{y}_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כעת נרצה למצוא את הוקטור שמתאים ל- $r_2 = 3$. נציב שוב (ב-2 המשוואות) ונקבל שהפתרון השני הוא:

$$\vec{y}_2(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אפשר גם לקחת בתור וקטור עצמי כפולה של מה שמצאנו. שני הוקטורים האלה הם בלתי תלויים (זה ברור כי האקספוננט שונה).

הפתרון הכללי למערכת הוא:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

או בצורה קודינאטות (שיותר נוח בצורה זו לפתור את בעית קושי):

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 = -2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}$$

אם היינו לוקחים וקטור עצמי אחר, זה פשוט מביא לשינוי של הקבוע השרירותי - לכן אנחנו בסופו של דבר נקבל אותו פתרון. לכן עדיף תמיד לבחור וקטור עצמי הכי פשוט.

ובכך פתרנו את מערכת המשוואות הליניאריות עם מקדמים קבועים הראשונה בחיים שלנו. קחו כמה שניות להתענג על הרגע ואז נמשיך לדוגמא הבאה.

דוגמא 2

היא תהיה יותר קשה ויופיעו בה ע"ע מספרים מרוכבים. בגלל שכל המשוואות הם עם מקדמים ממשיים - אם יש ע"ע מרוכב - גם הצמוד שלו הוא מרוכב. למה זה? כי הע"ע הם בסופו של דבר פתרונות לפולינום $|A - rI| = 0$ וזה הוא פולינום עם מקדמים ממשיים (ואז הטענה לגבי פולינומים עם מקדמים ממשיים).

נניח שיש לנו 2 ע"ע מרוכבים: $r_1 = \bar{r}_2$. אם מתקיים:

$$\begin{cases} A \vec{\xi}_1 = r_1 \vec{\xi}_1 \\ A \vec{\xi}_2 = r_2 \vec{\xi}_2 \end{cases}$$

$$\vec{\xi}_1 = \overline{\vec{\xi}_2} : \text{אז}$$

למה? נניח ש:

$$\vec{\xi}_1 = \vec{a} + i\vec{b} \Rightarrow y_1 = e^{(\alpha + i\mu)x} \vec{\xi}_1$$

וכמו שעשינו בעבר - אפשר עם קומבינציה ליניארית שלהם ליצור 2 פתרונות ממשיים. מה החלק הממשי של $\vec{y}_1$? אנחנו מניחים ש- $\vec{y}_1$ הוא פתרון, כלומר: $\vec{y}_1' = A \vec{y}_1$. בגלל שמטריצה A היא עם מקדמים ממשיים אז גם $\Re(\vec{y}_1)$ הוא פתרון (וכנ"ל לגבי החלק המדומה).

נשתמש בנוסחת אוילר כדי לכתוב את $\vec{y}_1$ (ואז נוכל לראות בדיוק מה החלק הממשי של $\vec{y}_1$):

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) \begin{pmatrix} a_1 + i b_1 \\ a_2 + i b_2 \end{pmatrix}$$

אז מה החלק הממשי של זה? טוב צריך להכניס את מה שמחוץ למטריצה (מה שיצא משימוש בנוסחת אוילר, ה- e והסינוס והקוסינוס) לתוך מטריצה, ואז לבדוק מה החלק הממשי והמדומה.

במקום לעשות את זה במקרה הכללי, נעשה את זה עבור דוגמא.

דוגמא

נתונה המשוואה:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{y}$$

אז תחילה מחפשים ע"ע ו"ע למטריצה. מה המשוואה ריבועית שהיא המשוואה האופיינית?

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-r \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}-r\right)^2 + 1 = 0$$

ולכן:

$$r + \frac{1}{2} = \pm i \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \pm i \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2} + i, r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

(נשים לב שיצאו שני ערכים עצמיים צמודים, כמו שטענו). עכשיו אנחנו רוצים לחפש וקטור עצמי - הוא יהיה הפתרון למערכת כאשר נציב את ה- r שמצאנו. נסמן את הוקטור $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

وهוא צריך לקיים:

$$A \vec{\xi} = r_1 \vec{\xi}$$

נמצא את 2 הרכיבים שלו:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \xi_1 + \xi_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \xi_1 \\ -\xi_1 - \frac{1}{2} \xi_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \xi_2 \end{cases}$$

זה משוואה אלגברית (של מספרים) והיא הומוגנית. ולכן פתרון קיים אם ורק אם הדט' שווה לאפס. אנחנו יודעים שהיא שווה לאפס כי ככה בחרנו את r . נמשיך. נסדר את האגפים יפה:

$$\begin{cases} \xi_2 = i \xi_1 \\ -\xi_1 = i \xi_2 \end{cases}$$

האם זו מערכת קונסיסטנטית? ודאי וודאי! ואפילו הפתרון שלה הוא:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון:

$$\vec{y}_1 = e^{(-\frac{1}{2} + i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

כעת נרצה למצוא את הפתרון השני. אפשר לעשות שוב מה שעשינו עבור הראשון אבל אפשר לנצל את זה שאנחנו יודעים שהם צמודים ולכן הוקטור המתאים יהיה צמוד. ולכן מיידית אנחנו יכולים להגיד ש:

$$\vec{y}_2 = e^{(-\frac{1}{2} - i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(נשים לב ששני דברים השתנו - המעריך של e - כלומר הע"ע צמוד, והוקטור - כלומר הו"ע צמוד) אנחנו יכולים לראות שהפתרונות הם בת"ל (כי המעריכים הם שונים^H), ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$\vec{y}(x) = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 e^{(-\frac{1}{2} + i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{(-\frac{1}{2} - i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

אם מבקשים מאיתנו למצוא פתרון כללי - זו היא התשובה (כאשר c_1, c_2 הם קבועים שרירותיים, לאו דווקא ממשיים). אם נפתור בעיית קושי שהתנאי ההתחלה שלה הוא גם ממשי, אנחנו אמורים לקבל (אם עשינו הכל נכון) פתרון ממשי בסופו של דבר (ואז אמנם הצגנו את הפתרון הכללי בצורה מרוכבת, אבל לכל בעיית קושי ממשית ייצא לנו פתרון ממשי).

כעת נרצה להציג את הפתרון הכללי בצורה ממשית. נסתכל על החלק הממשי והחלק המדומה של $\vec{y}_1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{(-\frac{1}{2} + i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= \operatorname{Re} e^{-\frac{1}{2}x} (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{Re} e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ -\sin x + i \cos x \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \right] = e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

^H (מה זה הסימן המוזר הזה לסימון הערה!?)

להראות ששני וקטורי פונקציות הם בת"ל זה באיזה שהוא מקום יותר קל מאשר להראות ששתי פונקציות הן בת"ל. כי אם בוקטור 1 בקורדינטה 5 יש פונקציה שהיא בת"ל לפונקציה בוקטור 2 בקורדינטה 5 אז יש שני וקטורים של הפונקציות הם בת"ל. אפילו אם הם לא היו בת"ל, ואפילו אם בכל קורדינאטה של הוקטורים, הפונקציות הן תלויות לינארית זה לא אומר שהוקטור הוא תלוי לינארית - זה יגיד את זה רק אם בכל קורדינאטה הפונקציות הן תלויות לינארית באותו אופן (כלומר אותו צירוף לינארי).

מי שלא בטוח מה הולך כאן שפשוט יסתכל על ההגדרה של פונקציות בת"ל, של וקטורים בת"ל ואז של וקטורים של פונקציות בת"ל.

איזה יופי שפיתחנו את זה ככה, כי עכשיו אנחנו גם יודעים מה החלק המדומה של $\vec{y}_1$ (שזה היה הדבר הבא שהיינו בודקים). הוא:

$$\operatorname{Im} e^{(-\frac{1}{2}i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{2}x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

אז כעת יש לנו 2 פונ' (החלק הממשי והמדומה של הפתרון הראשון). הם 2 פתרונות בת"ל ולכן גם הם מהווים בסיס - והם ממשיים!
לכן הפתרון הכללי בצורה ממשית הוא:

$$\vec{z}_1 = e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_2 = e^{-\frac{x}{2}} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = d_1 \vec{z}_1 + d_2 \vec{z}_2$$

(מאוד מזכיר מה שעשינו במשוואות מסדר שני עם מקדמים קבועים שקיבלנו שורשים מרוכבים ורצינו להציג את הפתרון הכללי בצורה ממשית).

אם כל השורשים שונים (גם אם הם מרוכבים) - תמיד נקבל n פתרונות בת"ל (כי המעריך יהיה שונה) אם יש לנו שורש כפול, צריך לעשות טיפול מיוחד (כמו שבעבר עשינו טיפול על ידי הכפלה ב- x).

סיימנו טכניקה לשיעור - נעבור חזרה לתיאוריה.

תיאוריה של מערכות

כאן אנחנו שוב הולכים לחזור על דברים כמו איטרציות פירקד וכו'.

אז אנחנו שוב מדברים על מערכת כללית:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

:

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

בעית קושי: מניחים תחילה שכל הפונקציות f_i הן רציפות בתחום R :

$$R = \left\{ \begin{aligned} |x - x_0| &< a \\ |\vec{y} - \vec{y}_0| = \sum_{k=1}^n |y_k - y_{k,0}| &\leq b \end{aligned} \right.$$

(נשים לב שנורמה הוקטורית שלנו היא לא אוקלידית - אבל כבר אמרנו שהיא שקולה לה).

נגדיר:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

ונניח ש- $\vec{f}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y :

$$|\vec{f}(x, \vec{y} + \Delta \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{y})| \leq L |\Delta \vec{y}|$$

נזכור שאם לפונקציות יש נגזרת חסומה אז הן מקיימות את תנאי ליפשיץ לפי y (הכיוון ההפוך לא נכון).

בעיית קושי במקרה הזה היא:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad \left(y_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix} \right)$$

אנחנו רוצים להוכיח קיום ויחידות של הפתרון. עושים זה על ידי העברת המערכת למשוואה אינטגרלית (מאוד דומה למה שעשינו בעבר למשוואה מסדר ראשון), ואז עושים איטרציות פירקד.

המשוואה האינטגרלית המתאימה לזה היא:

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}) ds$$

כמו בעבר, אפשר לשים לב שבמשוואה אחת אנחנו מכניסים גם את בעיית המערכת וגם את תנאי ההתחלה. למשוואה הזו אנחנו מגדירים איטרציות פירקד:

$$\varphi_k^l(x) = y_{k,0} + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_1^{l-1}, \dots, \varphi_n^{l-1}) ds$$

כאשר k זה מספר הקורדינאטה (עושים את האיטרציות לכל הקורדינאטות), l זה מספר האיטרציה. אנחנו נרצה להוכיח שהאיטרציות הללו מתכנסות. עושים זאת כמו שעשינו בעבר, מראים כי

$$|\varphi_k^l - \varphi_k^{l-1}| \rightarrow 0 \quad \text{ושהטור:}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_k^l - \varphi_k^{l-1})$$

מתכנס במידה שווה.

אנחנו נעצור כאן את ההוכחה כי ברור לכולנו איך ממשיכים (למי שלא שיקפוץ להוכחה עבור משוואה מסדר ראשון) ויוכיח את זה למקרה כאן.