

מד"ר 1 – שיעור 24

משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים

נמשיך עם הדוגמא שלו סיימנו בשיעור שעבר, ואז נגיד את הרעיון (הפיכת 2 פתרונות מרוכבים ל-2 פתרונות ממשיים) באופן כללי. מי שלא זוכר – שיקפוץ לסוף השיעור האחרון, או פשוט יתחיל לקרוא ויבין מההקשר.

נתונה המשוואה:

$$y^{(4)} + y = 0$$

ונרצה למצוא את כל הפתרונות שלה.

אז אנחנו כבר יודעים איך לעשות את זה - כתובים את המשוואה של הפולינום האופייני:

$$\lambda^4 + 1 = 0$$

$$\lambda^4 = -1$$

ומוצאים את כל הפתרונות. כיוון שהסדר של המשוואה היא 4, סדר הפולינום הוא 4, ולכן גם מספר הפתרונות הוא 4. במקרה שלנו, הפתרונות הם (פשוט הוצאת שורש ממספר, כמו שלמדנו בתיכון):

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

כמו שציפינו, יש לנו כאן 2 זוגות צמודים:

$$\lambda_4 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2$$

כעת, כמו שאנחנו יודעים, כל שורש λ נותן לנו פתרון מהבסיס, והוא $e^{\lambda x}$. (ויש את הקטע של השורש עם הריבויים, שאז הפתרון הוא $x e^{\lambda x}$ ועוד הכפלה ב- x לכל ריבוי נוסף)

וכעת אם למשל $\lambda = a + ib$ אז הוא נותן לנו פתרון כזה:

$$e^{ax} (\cos(bx) + \sin(bx))$$

וכך אנחנו מקבלים בדוגמא זו 4 פתרונות בסיסים שהם מרוכבים.

אפשרות אחרת (שהיא כל הרעיון של הדוגמא):

לקחת שורש מרוכב λ עם הצמוד שלו $\bar{\lambda}$ ולהגיד ששניהם נותנים לנו 2 פתרונות בסיס ממשיים:

$$e^{ax} \cos(bx)$$

$$e^{ax} \sin(bx)$$

וראינו בשיעור שעבר למה זה נכון (לפני הדוגמא). כעת נגיד את התשובה הסופית בשתי הדרכים.

תשובה סופית: הפתרון הכללי למשוואה $y^{(4)} + y = 0$ הוא:

1. אם עובדים בשיטה הראשונה:

$$y(x) = c_1 e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x} + c_3 e^{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x} + c_4 e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}$$

2. אם עובדים בשיטה השנייה:

$$y(x) = \tilde{c}_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \tilde{c}_2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \tilde{c}_3 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \tilde{c}_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$$

הערה:

מהמשפט היסודי של האלגברה, כל פולינום מתפרק לרכיבים לינאריים (ויכולים להיות ריבויים).
אם הפולינום הוא עם מקדמים ממשיים, אז אם יש שורש λ , גם $\bar{\lambda}$ הוא שורש. כמו כן, הריבויים שלהם שווים.

ועכשיו עוברים לנושא חדש – מערכות משוואות.
מיד שכנעבור לעמוד הבא, נראה שהוא לא ממש חדש...

מערכת משוואות דיפרנציאלית

את משפט קיום ויחידות אנחנו כבר ניסחנו, ונדון בעתיד עליו. בינתיים נקבל את נכונותו. הניסוח שלו עבור משוואות לינאריות, שזה מה שעכשיו נדון בו – נכתב בשיעור שעבר. השיעור אנחנו נזכיר אותו שוב.

דוגמא חשובה של מערכות - מערכות לינאריות (הומוגניות)

כמו במשוואות, כדי לפתור את המערכת הלא הומוגנית, יהיה עלינו לפתור את המערכת ההומוגנית, ולכן נתחיל להתעסק תחילה עם מערכות לינאריות הומוגניות.

אז יש לנו:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

ומערכת משוואות הומוגנית לינארית מסדר n היא:

$$\vec{y}'(x) = A_{n \times n}(x) \vec{y}(x)$$

נזכר שלגזור פונ' של n רכיבים זה לגזור כל רכיב בנפרד, לכן אפשר להציג גם את המערכת כך:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

המקדמים במטריצה (הם a_{ij}) הם המקדמים של המערכת. הם פונקציות של x .

כדי שמשפט הקיום והיחידות יתקיים אנחנו צריכים ש- a_{ij} תהיינה פונ' רציפות של x (וזו התזכורת למה זה המשפט).

לפי משפט קיום ויחידות אם $a_{ij}(x)$ הן פונקציות רציפות של x , אז לכל תנאי התחלה $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ קיימת יחידה פונקציה וקטורית $\vec{y}(x)$ שמקיימת גם את מערכת המשוואות וגם את תנאי ההתחלה.

הערה: למערכת לינארית פתרון $\vec{y}(x)$ קיים על כל קטע (a, b) שבו a_{ij} מוגדרות ורציפות.

אם a_{ij} הם פונ' קבועות (לא תלויות ב- x), כלומר $a_{ij}(x) \equiv a_{ij}$ אומרים שמערכת היא עם מקדמים קבועים. מערכות כאלו אנחנו נדע לפתור עד הסוף.

במקרה הכללי של מערכת לינארית (כלומר אפילו עם מקדמים לאו דווקא קבועים), נרצה לתאר את אוסף כל הפתרונות. נסמן ב- V את אוסף כל הפונקציות $y(x)$ שמהוות פתרון, כלומר:

$$V = \{ \vec{y}(x), x \in (a, b) : y(x) \text{ is a solution to the system} \}$$

טענה 1: V הוא מרחב לינארי.

מה זה אומר?

1. אם $\vec{y}_1(x)$ ו- $\vec{y}_2(x)$ שניהם פתרונות אז הסכום שלהם הוא גם פתרון. איך בודקים את זה? לפי ההגדרה.

2. כפולה של פתרון היא גם פתרון.

שני הדברים האלה אומרים ש- V היא מרחב לינארי.

הוכחת הטענה:

1. אם $\vec{y}_1(x)$ הוא פתרון... רגע! מה זה אומר שהוא פתרון, זה אומר שאם אני אגזור אותו הוא יהיה שווה לצד ימין של המערכת, כלומר:

$$\vec{y}_1'(x) = A(x) \vec{y}_1(x)$$

כעת כנ"ל עבור $\vec{y}_2(x)$:

$$\vec{y}_2'(x) = A(x) \vec{y}_2(x)$$

כעת נחבר את האגפים ונשתמש בכך שהגזרת היא לינארית, ובחוק הפילוג של כפל במטרציות, ונקבל:

$$[\vec{y}_1(x) + \vec{y}_2(x)]' = A(x) [\vec{y}_1(x) + \vec{y}_2(x)]$$

ולכן הפונקציה החדשה שלנו, $\vec{y}_1(x) + \vec{y}_2(x)$ היא גם פתרון.

2. תרגיל לבית.

טענה 2: מימד של המרחב V הוא n (נשים לב שזה אומר שהוא בפרט סופי).

מסקנה: קיים בסיס $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ של V , כך שכל פתרון אפשר להציג כצירוף לינארי שלנו:

$$\vec{y}(x) = c_1 \vec{\varphi}_1(x) + \dots + c_n \vec{\varphi}_n(x)$$

דבר זה הוא בעל ערך רב - הוא אומר שעל מנת למצוא את כל הפתרונות למשוואה, מספיק למצוא את הפתרונות הבסיסים.