

מד"ר 1 – תרגול 8

היום נדבר על ורונסקיאן, אותו הכרנו בשיעור האחרון.

תלות לינארית

קודם כל, נניח שיש לנו פונקציות $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ וכל הפונ' האלה הם פונ' ממספר ממשי למספר ממשי (כלומר: $f_i(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

נתסכל כל הנוסחא הזו:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

שאלה: האם אפשר למצוא אלפא 1, אלפא 2, ..., אלפא n כך שלא כולם שווים ל-0 ושהסכום הזה יהיה שווה לאפס?

מה הכוונה שווה לאפס (לגבי הסכום)? שווה לאפס לכל תחום ההגדרה (כלומר אפס זהותית). אנו מניחים שלכל הפונ' יש תחום הגדרה אחד (כלומר אותו תחום הגדרה).

לפונ' כאלה (כלומר ל-n פונ' עבור התשובה לשאלה היא "כן") נקרא פונ' תלויות לינארית. אם המצב לא כזה הן נקראות פונ' בלתי תלויות לינארית.

אם הפונ' תלויות לינארית, אז (עפ"י הגדרה) $\exists i, \alpha_i \neq 0$ ולכן אחת הפונ' (נניח לרגע הראשונה) היא צירוף ליארני של האחרות (בדיוק כמו לוקטורים):

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x) - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} f_n(x)$$

ורונסקיאן

אם יש לנו פונ' ואנחנו צריכים לבדוק תלות או אי תלות לינארית, אנחנו צריכים להשתמש בורונסקיאן:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

אם הוא שווה לאפס, זה אמור שהקבוצה של הפונ' שלנו היא תלויה לינארית. אם לא שונה מאפס אז הן בלתי תלויות לינארית. הורונסקיאן הזה זה פונ' וראינו שבשיעור שהוא שווה לאפס זהותית או שאיננו מתאפס כלל.

אם לדוגמא יצא שהורונסקיאן יצא $\sin(x)$ בתחום הגדרה שלא מכיל אפסים של $\sin$ (אנחנו יודעים שלא יכול לצאת $\sin$ עם תחום ההגדרה מכיל אפסים של $\sin$) - אז אנחנו יודעים שהפונ' הן בלתי תלויות לינאריות.

את כל ההוכחות לדברים הללו ראינו בשיעור.

דוגמא

נבדוק את התלות \ אי תלות של שלושת הפונ':

$$1, \cos t, \sin t$$

נחשב את הורונסקיאן:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 1 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) = 1$$

יצא לנו 1. מכיוון ש-1 שונה מאפס, הפונ' הללו הן אינן תלויות לינארית.

בשיעורי בית בתרגיל הראשון, אנחנו נצטרך לבדוק כמה פונ' לגב התלות הלינארית שלהן. יש מקרים שלא צריך לבדוק את זה כך. לדוגמא, לבדיקת השלשה:

$$1, \sin^2 x, \cos^2 x$$

האם הן תלויות או בלתי תלויות?

תלויות! ואיך ניתן לראות את זה? כי יש את הנוסחא: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (אם רוצים להיות דייקנים)

אפשר לציין $(\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1)$

לכן לפעמים אם מכירים נוסחאות סכום עם מקדמים, אז לא צריך לחשב את הורונסקיאן.

יצירת משוואה דיפרמנציאלית מפתרונות

נניח שיש לנו את הפונ' $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ וגם אנחנו יודעים שהן פונ' בלתי תלויות לינארית.

שאלה: אם אפשר למצוא משוואה דיפ' שכל הפונ' האלה הן פתרונות שלה?
תשובה: כן, והיא כמובן תהיה מסדר n.

איך נעשה את זה?

נעשה ורונסקיאן ונדחף לו עוד פונ' u . את כל זה נשווה לאפס. כלומר:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n & u \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' & u' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} & u^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

וזו תהיה משוואה עבור u .

אנחנו נקבל משהו מהצורה:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n & u \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' & u' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} & u^{(n)} \end{vmatrix} = g_0(x)u + g_1(x)u' + \dots + g_n(x)u^{(n)} = 0$$

וזו באמת משוואה מסדר n .

איך נראה שכל הפונ' שלנו הן פתרון? נניח ש- $u=f_1$ אז במקום העמודה של u צריך להעתיק את העמודה של f_1 ואז יהיו לו 2 עמודות שהן שוות, ולכן הדטרמיננטה שווה ל- 0. זו ההוכחה ש- f_1 הוא פתרון של המשוואה - כנ"ל עבור $f_2, \dots, f_n$.

נזכר - זו משוואה לינארית הומוגנית ולכן קומב' לינארית של פתרונות הוא גם פתרון, ולכן כל המרחב הלינארי שנפרש על ידי הפונ' הבלתי תלויות הוא פתרון עבור המשוואה הזו.

דוגמא

האם הפונ': $\cos t \sin t$ תלויות לינאריות או לא?

כשהן היו עם 1 (כפונ') זה היה בלתי תלוי, אז בפרט בין שתיהן הן בלתי תלויות.

נבנה משוואה שהן הפתרונות שלה (עכשיו נשתמש ב- f במקום u):

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & f \\ -\sin t & \cos t & f' \\ -\cos t & -\sin t & f'' \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot f \cdot \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot f' \cdot \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot f'' \cdot \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= f(\sin^2 t + \sin^2 t) - f'(0) + f''(\cos^2 t + \sin^2 t) = f + f''$$

ולכן המשוואה שלנו היא: $f + f'' = 0$

נבדוק שבאמת $\sin$ ו- $\cos$ הן פתרונות של המשוואה. בעצם תבדקו אתם. בשיעורי בית ובמבחן ("במבחן אני ממליץ מאוד" אפילו) כדאי להציב חזרה כדי לוודא שהמשוואה שמצאנו היא נכונה.

מה לגבי פתרונות אחרים למשוואות שאנחנו מייצרים בצורה הזו שהן לא מהרחב הוקטורי? אין. (הוכחנו בשיעור שלמשוואה מסדר $n \dots$ מה הוכחנו?)

מספרים מרוכבים

תחילה נזכר מכמה דברים מבית הספר.

המלצה אישית:
לא לעבור על הסעיף הזה יותר מ-14 שניות.

מספר מרוכב z הוא מהצורה: $z = a + ib$ כך ש: $a, b \in \mathbb{R}$ ו- $i^2 + 1 = 0$.
"אני לא אוהב שאנשים אומרים ש- i שווה לשרש של מינוס אחד, כי אף לא יודע מה זה השרש -1".

אנחנו רוצים שיהיו לנו במרוכבים אותם חוקים של ממשיים.
כלל ראשון: אם יש סכום שלא יהיו סוגריים:

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id$$

כלל שני: אפשר לשנות סדר:

$$a + ib + c + id = a + c + ib + id$$

כלל שלישי: פילוג:

$$a+c+ib+id = (a+c) + i(b+d)$$

קיבלנו שסכום של שני מספרים זה סכום של החלק הממשי וסכום של החלק המדומה.

לגבי כפל: שוב, נשתמש באותם כללים רגילים של הממשיים:

$$(a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + \underbrace{ii}_{=-1} bd = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

כעת לגבי חלוקה: למה שווה $\frac{a+ib}{c+id}$?

נגדיר צמוד: $\overline{a+ib} = a-ib$ ונראה שכפל בין מספר וצמודו יוצא: $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

נשתמש בזה פה:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+ibc-iad+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

חוץ מהצגה זו (שנקרא לה הקרטזית), יש לו עוד הצגה - פולרית:

$$z = a+ib = R \cdot e^{i\varphi} \quad (R, \varphi \in \mathbb{R})$$

כדי לעבור בין a, b ל- R, φ עלינו להשתמש בנוסחת אוילר:

$$z = a+ib = R \cdot e^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi$$

נוסחאות

נוסחא: $\overline{R e^{i\varphi}} = R e^{-i\varphi}$ - אנחנו נשתמש בה הרבה.

עוד נוסחאות:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

ועכשיו דבר שלא בטוח שאנחנו יודעים!
אם יש לנו פולינום מעל המרוכבים:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

זה הוא פולינום ממעלה n (כלומר $a_n \neq 0$, אם זה לא היה אז מעלתו הייתה נכונה יותר)

אם $\forall i, a_i \in \mathbb{R}$ (כל המקדמים ממשיים) אז עבור כל פתרון - גם הצמוד שלו הוא פתרון (תזכורת - צמוד של ממשי הוא המספר עצמו)