

מד"ר 1 – שיעור 15

למדנו קיום ויחידות של מערכת משוואת מסדר ראשון (למדנו זה מושג יחסי – אמרנו. אנו נניח כי המשפט נכון ללא הוכחה. ניתן מקרה פרטי שלנו בעוד כמה שורות. יתכן ונראה הוכחה כללית בעתיד)

משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני

הצורה הכללית שלה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

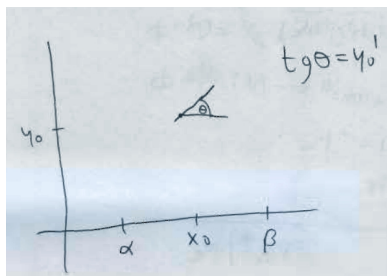
משפט (ללא הוכחה):

תהינה פונ' $p(x), q(x), g(x)$ רציפות בקטע $\alpha < x < \beta$ אז קיים פתרון אחד ויחיד כך ש:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \quad \alpha < x_0 < \beta$$

כאשר y_0, y'_0 שני פרמטרים שרירותיים.

אז אם:



ושלושת הפונקציות רציפות בקטע הזה, אז קיים רק פתרון אחד שעובר דרך הנקודה הזו בשיפוע הזה.

איך מוכיחים?

די פשוט. ראינו את ההוכחה עבור משוואה מסדר ראשון (אפילו לא לינארית). אפשר להפוך את המשוואה מסדר שני לשתי משוואות מסדר ראשון - ואז יש לנו מערכת של 2 משוואות מסדר ראשון. את זה הופכים למשוואה אינטרגלית ואז לפי שיטת פיקרד ודברים דומים שעשינו מוכיחים את הקיום והיחידות.

משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני הומוגניות

אם $y(x) \equiv 0$ אז המשוואה נקראת הומוגנית. כלומר משוואה הומוגנית נראית ככה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

משוואה כזו תמיד מאפשרת פתרון טריוויאלי ($y=0$ זהותית).

נוח לכתוב משוואה כזו בצורה: $L[y] = 0$, כאשר (הגדרת האופרטור):

$$L = \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} + p(x) \frac{d(\cdot)}{dx} + q(x) \cdot (\cdot)$$

(יש נקודה בתוך הסוגריים ששם שמים את מה שהאופרטור מקבל)
זה הוא אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר שני.

נשים לב שב- L לא מבוטא תנאי ההתחלה.

משפט

יהיו $y = y_1(x)$ $y = y_2(x)$ שני פתרונות של המד"ר: $L[y] = 0$. אזי הצירוף הלינארי:
 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (c1 ו- c2 הם שני קבועים שרירותיים) הוא גם פתרון של המד"ר הזה.

הוכחה:

רגע לא אמרנו שיש פתרון יחיד?
אמרנו שיש פתרון יחיד למשוואה עם תנאי ההתחלה - פה
אנחנו מדברים על פתרון כלשהוא למשוואה.

ידוע לנו ש: $L[y_1] = 0$ ו- $L[y_2] = 0$. נבדוק שהקומבינציה הלינארית היא גם פתרון:

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = L[c_1 y_1] + L[c_2 y_2] = c_1 \cdot L[y_1] + c_2 \cdot L[y_2] = 0$$

↑
האנוניאלי לינארי כי
נשגה היא לינארי

דוגמא

נקח מד"ר מסדר שני בצורה כזו:

$$y'' + y = 0$$

אפשר לנחש מה הפתרון פה - זו נגזרת שניה שווה לפונ' עם סימן מינוס... אז שני פתרונות הם:

$$y_1 = \sin x \quad y_2 = \cos x \quad (\text{קל לבדוק}).$$

על סמך מה שהוכחנו אפשר להגיד ש- $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ זה גם פתרון.

זו תכונה של משוואה לינארית הומוגנית בלבד. אם המשוואה לא-לינארית יתכן והקומציבנה הלינארית לא תהיה פתרון.

דוגמא

נסתכל על המשוואה הלא-לינארית:

$$y'' + y^2 = 0$$

(y מופיע בריבוע ולכן לא לינארית)

נניח שיש שתי פתרונות: $L[y_1] = 0$ ו- $L[y_2] = 0$.

לכן ידוע כי:

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1^2 &= 0 \\ y_2'' + y_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

ונבדוק האם $y = y_1 + y_2$ (צירוף לינארי עם $c_1 = c_2 = 1$) הוא פתרון של המשוואה:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2)^2 &= y_1'' + y_2'' + y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 = \\ &= \underbrace{(y_1'' + y_1^2)}_{=0} + \underbrace{(y_2'' + y_2^2)}_{=0} + 2y_1 y_2 \neq 0 \end{aligned}$$

הגדרה

נאמר כי צמד פתרונות $y_1(x), y_2(x)$ של המד"ר $L[y] = 0$ מהווה צמד יסודי/בסיסי של פתרונות אם כל פתרון של המד"ר ניתן להציג כצירוף לינארי של $y_1(x), y_2(x)$.

דוגמא

עכשיו נסתכל שוב על $y'' + y = 0$. אנחנו יודעים ש- $y_1 = \sin x$ אבל אם נקח את $y_2 = 2 \sin x$, הוא גם פתרון של המשוואה. אבל ברור ששני אלה לא יכולים להוות צמד בסיסי של פתרונות, כי יש פתרון שאי אפשר לציג כצירוף לינארי שלהם, למשל $\cos$.

יהי $y(x)$ פתרון של המד"ר $L[y] = 0$. נקח גם:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \quad \alpha < x_0 < \beta$$

ננסה להציג את הפתרון הזה כצירוף לינארי של 2 פתרונות אחרים של המשוואה: $y_1(x), y_2(x)$ (כלומר $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$).

כלומר מה שאנחנו מנסים לעשות זה למצוא c_1 ו- c_2 כך ש:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

נציב x_0 ונראה מה נקבל:

$$y_0 = y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0)$$

נגזור ונציב x_0 :

$$y_0' = y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$$

כלומר קיבלנו:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y_0' &= y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת של משוואה לינארית עבור 2 פרמטרים (c_1 ו- c_2). האם היא פתירה באופן חד ערכי? זו משוואה לינארית לא הומוגנית - אז כדי שיהיה פתרון יחיד צריך שהדטסמיננטה תהיה שונה מאפס. כלומר ש:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0) \cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0) \cdot y_1'(x_0) \neq 0$$

זה הוא תנאי הכרחי שאת $y(x)$ ניתן להציג כצירוף לינארי של y_1, y_2 עבור כל צמד y_0, y_0' .

לכן הוכחנו את המשפט:

תהינה $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ צמד פתרונות של המד"ר $L[y] = 0$. בנוסף:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

אזי את הפתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

תמיד ניתן להציג כצירוף לינארי: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

המשפט הוא רק עבור משוואה לינארית הומוגנית. אם היא לא הומוגנית - אי אפשר להגיד שקומבינציה לינארית של 2 פתרונות היא פתרון.

כעת אנחנו מחפים את התנאים שאם יש לנו 2 פתרונות - נוכל באמצעותם לבנות כל פתרון (באמצעות צירוף לינארי) - כלומר שהם צמד בסיסי.

קיבלנו כבר תנאי הכרחי בנתיים. (אם ה-DET שונה מאפס ניתן להציג) אנחנו נוכיח גם שהוא מספיק.

למי שאיבד - מה עשינו?
אנחנו מנסים למצוא פתרון כלשהוא כקומ' של 2 פתרונות אחרים. הצבנו את x_0 במשוואה ובגזירה שלה. קיבלנו 2 משוואות. ניתן לראות שזו מערכת של 2 משוואות לינארית (לא דיפ', משוואת עבור מספרים). כדי להבטיח שאפשר באופן חד ערכי פתרון, כלומר למצוא c_1, c_2 , צריך שה-DET תהיה שונה מאפס.

משפט

אם $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$ ו- $\alpha < x_0 < \beta$ ו- $W \neq 0$ אז:

כל פתרון של המד"ר $L[y] = 0$ ניתן להציג כ: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ באופן יחיד.

הוכחה:

יהי $y = \varphi(x)$ פתרון של המד"ר $L[y] = 0$. נסמן: $\varphi(x_0) = y_0$ ו- $\varphi'(x_0) = y_0'$. נתבונן בבעיית התחלה:

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

לפי המשפט הקודם ניתן למצוא c_1, c_2 כך ש: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ומתקיים תנאי ההחלה:

מיחידות הפתרון נובע: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. (נזכר שלקחנו את y_0 ו- y_0' מתוך פ').

כיוון ש- $y = y(x)$ שרירותי, אזי כל פתרון פ' של המד"ר ניתן להציג כ: $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

שוב נחזור על המשפט האחרון:

נניח שיש לנו 2 פתרונות של המד"ר ההומוגני $L[y_1] = 0$ $L[y_2] = 0$ ו-

$$\text{אזי, } W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0, \alpha < x_0 < \beta$$

כל פתרון y של המשוואה $L[y] = 0$ (ממש של המשוואה הזו, לא שלה ועוד תנאי התחלה) ניתן להציג כקומב' ליארית: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

ל- $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ נראה פתרון כללי של המד"ר $L[y] = 0$.

אז מה קיבלנו?

y_1, y_2 מהווים צמד בסיסי של פתרונות!

מספיק שהם יקיימו את התנאי $W \neq 0$ עבור איזה שהוא x_0 בתחום, ואז הם צמד בסיסי!

דוגמא

נסתכל שוב על: $y'' + y = 0$ (אנחנו ממש יצירתיים השיעור)

אנו יודעים 2 פתרונות: $y_1 = \sin x$ $y_2 = \cos x$.

נראה שהם צמד בסיסי על ידי זה שנמצא נקודה x_0 בה $W \neq 0$:

$$W|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} \sin x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\sin x_0 \end{vmatrix} = -\sin^2 x_0 - \cos^2 x_0 = -1$$

טוב למעשה זה קורה עבור כל x_0 ולא היינו צריכים לבחור אחד מסויים שזה יקרה בו. (מה הסיכוי שזה יקרה? מיד בהמשך השיעור!)

נקח 2 פונ' גזירות $u_1(x)$ $u_2(x)$ (לא בהכרח פתרונות של $L[y]=0$) ונסמן:

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x) \cdot u_2'(x) - u_2(x) \cdot u_1'(x) = W\{u_1, u_2\} = W(x)$$

(זו איזה שהיא פונ' של X)

$W\{u_1, u_2\}$ - זה נקרא הדטרמיננטה של וורונסקי, או וורונסקיאן (Wronskian).

כדי לבדוק ש- $u_1(x)$ $u_2(x)$ הם צמד בסיסי של $L[y]=0$ עלינו לבדוק האם $W\{u_1, u_2\}$ מתאפס ב- (α, β) (באיזה שהיא נקודה, כי כמו שאמרנו מספיק שזה יקרה בנקודה אחת!)

משפט

אם y_1, y_2 הם פתרונות של המדר $L[y]=0$ על קטע (α, β) (p, q) רציפות בו, אזי $W\{y_1, y_2\}$ הוא או אפס זהותית ב- $W\{y_1, y_2\}$ או אף פעם לא מתאפס בו.

כלומר הורונסקיאן לא יכול להחליף סימן. אם הוא אפס בנק' אחת הוא אפס בכל הקטע. וזה מסביר למה קודם לא היינו צריכים לבחור x_0 שזה יקרה בו וזה פשוט קרה לנו בכל התחום...

הוכחה:

נזכר שנתון לנו ש y_1, y_2 הם פתרונות של המ"ד, לכן:

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

נבצע הכפלות:

$$\begin{array}{ll} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 & / \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 & / \cdot (y_1) \end{array}$$

ונחבר:

$$\begin{aligned} & -y_2 y_1'' - p(x)y_2 y_1' - q(x)y_1 y_2 \\ & + y_1 y_2'' + p(x)y_1 y_2' + q(x)y_1 y_2 = 0 \\ & (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(x)(y_1 y_2' - y_2' y_1) = 0 \end{aligned}$$

נסתכל על האיבר האחרון, זה בדיוק הדט! (כלומר זה הורונסקיאן!)

מה לגבי האיבר הראשון?

$$\begin{aligned} y_1 y_2'' - y_2 y_1'' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_1'' y_2 = \\ &= (y_1 y_2')' - (y_1' y_2)' = \underbrace{(y_1 y_2' - y_1' y_2)'}_{W(x)} = W'(x) \end{aligned}$$

(במעבר הראשון הוספנו והחסרנו אותו דבר)
הוא הנזגרת של הורונסקיאן!

בסך הכל קיבלנו:

$$\underbrace{(y_1 y_2'' - y_2 y_1'')}_{W'(x)} + \rho(x) \underbrace{(y_1 y_2' - y_1' y_2)}_{W(x)} = 0$$

כלומר:

$$W' + \rho(x) W = 0$$

נפתור את זה (באמצעות הפרדת משתנים):

$$\begin{aligned} \frac{W'}{W} = -\rho(x) &\Rightarrow (\ln |W|)' = -\rho(x) \Rightarrow \ln |W| = -\int \rho(x) dx + c \\ &\Rightarrow |W| = e^{-\int \rho(x) dx + c} = e^c \cdot e^{-\int \rho(x) dx} \Rightarrow W = \underbrace{\pm e^c}_A \cdot e^{-\int \rho(x) dx} \end{aligned}$$

בסך הכל:

$$W = A \cdot e^{-\int \rho(x) dx}$$

כעת, אם הקבוע A שווה לאפס, אז X שווה לאפס זהותית.
אם הקבוע A שונה מאפס (לא משנה חיובי או שלילי) אז W לא מתאפס בכל התחום (כי e בחזקת משהו זה תמיד משהו חיובי).

[למעשה יש גם פתרון סינגולרי, הפתרון $W=0$ זהותית, ממנו לכאורה התעלמו כאשר חילקנו ב- W לפני ביצוע האינטגרציה, אבל הוא מתקבל עבור $A=0$].

זאת אומרת שאם יש לנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני ויש לנו 2 פתרונות, אז הורונסקיאן שלהם הוא או תמיד חיובי, או תמיד שלילי, או אפס זהותית.

מסקנה

מספיק לנו לבדוק רק נקודה אחת בורונסקיאן כדי לבדוק האם שני פתרונות הם בסיסים.

מה נשאר לנו?

עוד לא הוכחנו שהמשוואה תמיד מאפשרת שיהיו לה צמד בסיסי של פתרונות.

משפט

למשוואה: $L[y]=0$ תמיד קיים צמד בסיסי של פתרונות ב- (α, β) כאשר p ו- q רציפות.

הוכחה:

נקח נקודה x_0 ב- (α, β) .

לפי משפט קיום ויחידות הכללי, בעיות ההתחלה הללו: (2 בעיות)

$$\begin{aligned} L[y] &= 0, \quad y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0 \\ L[y] &= 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1 \end{aligned}$$

תמיד פתירות והפתרונות הם יחידים, נסמנם ב- y_1, y_2 בהתאמה. נסתכל על הורנסיקאן בנקודה x_0 :

$$W|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

כלומר הפתרונות y_1, y_2 הם צמד בסיסי של פתרונות.

למשוואה יש אינסוף צמדים בסיסים. חישובו איך להוכיח את זה!
(רמז, הוכחה מאוד דומה למשפט האחרון)

תלות לינארית

הגדרה: נאמר ש- $f(x), g(x)$ תלויות לינארית בקטע (α, β) אם קיים צמד קבועים c_1, c_2 כאשר

(דרך מכוערת להגיד פשוט ששניהם שונים מאפס) כך ש: $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) \equiv 0$$

(זהותית בקטע (α, β))

נאמר ש- $f(x), g(x)$ הן בלתי תלויות לינארית אם $c_1 f(x) + c_2 g(x) \equiv 0$ אם ורק אם $c_1 = c_2 = 0$.

דוגמא

נקח 2 פונ':

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

אבל אנחנו יודעים ש- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, ולכן:

$$c_1 \sin x + c_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \equiv 0$$

כאשר $c_1 = c_2 = 1$. ולכן שתי הפונ' הללו תלויות לינארית.

עוד דוגמא

2 פונ':

$$f(x) = e^x \quad g(x) = e^{2x} \quad -\infty < x < \infty$$

נוכיח שהן לא תלויות לינאריות, כלומר שלא ניתן למצוא c_1, c_2 שונים מאפס כך ש:

$$c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \equiv 0$$

נניח שזה נכון בשלילה.

נקח שתי נקודות שונות זו מזו: $x_1 \neq x_2$. ואז: $x = x_1$ $x = x_2$

$$\begin{aligned} c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} &= 0 \\ c_1 e^{x_2} + c_2 e^{2x_2} &= 0 \end{aligned}$$

הדט' של המערכת הזו:

$$\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{2x_1} \\ e^{x_2} & e^{2x_2} \end{vmatrix} = e^{x_1+2x_2} - e^{x_2+2x_1} = e^{x_1+x_2} \cdot (e^{x_2} - e^{x_1}) \neq 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
גורם $x_1 \neq x_2$
גורם $0 \neq$

ולכן פתרו יחיד עבור c_1, c_2 הוא הפתרון הטריטיואלי $c_1 = c_2 = 0$.