

מד"ר 1 - תרגול 10

יש לנו היום 2 משוואות שאנחנו צריכים לפתור. אנחנו צריכים לפתור קודם כל משוואה פשוטה מאוד, היא הומוגנית עם מקדמים קבועים.

תרגיל 1

נפתור את המשוואה:

$$y''' - 4y' = x + 3\cos(x) + e^{-2x}$$

זו היא לא משוואה הומוגנית, כי האגף הימני (כלומר האיבר החופשי, זה שאינו מוכפל ב- y או בנגזרותיו) אינו אפס. תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית.

בשיעור פתרנו את זה בצורה של וריאציה של משתנים. במקרה שהמשוואה היא בעלת מקדמים קבועים יש עוד שיטה שהיא יותר קלה. מה שלמדנו בכיתה עובד תמיד, אבל צריך לעשות בו הרבה חישובים (שיכולים להיות מסובכים). נלמד עכשיו שיטה הרבה יותר קלה, שעובדת רק עבור משוואות עם מקדמים קבועים.

השיטה

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית:

$$y''' - 4y' = 0$$

ננחש את הפתרון מהצורה $y = e^{rx}$ ואז

$$y = e^{rx}$$

$$y' = r e^{rx}$$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

$$y''' = r^3 e^{rx}$$

ואחרי הצבה של זה אנחנו מקבלים את התנאי על מנת שזה יהיה פתרון:

$$r^3 - 4r = 0$$

פתרונות המשוואה הם: $0, 2, -2$.

לכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא:

$$c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

כעת לפתרון המשוואה הלא הומוגנית.

באגף הימני יש סכום של 3 איברים, לכן אנחנו יכולים לעבוד עם כל איבר בנפרד, ואז הפתרון יהיה סכום של ההומוגנית + 3 הפתרונות הפרטיים (ודאו שברור לכם למה).

1. אז תחילה אנחנו צריכים למצוא פתרון למשוואה (נסמן אותו ב- y_{p_1}):

$$y''' - 4y' = x = P_1(x)$$

x הוא פולינום מדרגה 1, ולכן סימנו אותו ב- P_1 . אז אנחנו צריכים לנחש פתרון (לפחות זו אחת השיטות במקרה הזה). מאיזה צורה ננחש אותו? פולינום שהוא מדרגה 1 - $Q_1(x)$. כיוון ש- $r=0$ (וזה גם למה שאנחנו רואים שאם הפולינום יהיה קבוע אז $Ly=0$ וזה לא יכול להוות פתרון למשוואה הלא הומוגנית), ולכן הפתרון שנחש יהיה $xQ_1(x)$. אם 0 היה שורש כפול (מה שגם היה גורם לפונקציות לינאריות $ax+b$ לפתור את המשוואה ההומוגנית) היינו מנחשים את הפתרון $x^2 Q_1(x)$ ראה הערה. כעת:

$$y_{p_1} = xQ_1(x) = Ax^2 + Bx$$

$$y_{p_1}' = 2Ax + B$$

$$y_{p_1}'' = 2A$$

$$y_{p_1}''' = 0$$

ולכן:

$$-4(2Ax + B) = x \Rightarrow -8Ax - 4B = x$$

אז (שוויון של פונקציות):

$$B=0, A=-\frac{1}{8}$$

בסך הכל:

$$y_{p_1} = -\frac{x^2}{8}$$

2. כעת נפתור את:

$$y''' - 4y' = 3\cos(x)$$

אנחנו יודעים לפי נוסחת אוילר ש:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

e^{ix} ו- e^{-ix} הם לא פתרון למשוואות ההומוגניות שלנו, ולכן $\cos(x)$ אינו פתרון למשוואה (למעשה סתם עשינו את זה כדי להתלהב שאנחנו יודעים את נוסחת אוילר, היינו יכולים פשוט לבדוק ישירות את $\cos(x)$ ולראות שהוא אינו פותר את המשוואה). אז אנחנו מנחשים פתרון מהצורה:

$$y_{p_2} = A\cos(x) + B\sin(x)$$

(אם זה היה פתרון להומוגנית היינו מחפשים פתרון מהצורה $y_{p_2} = x(A\cos(x) + B\sin(x))$)

ראה הערה:

טוב, אז הנושא הזה לא ממש ברור לי עד הסוף. ברמת העקרון כאשר אנחנו רוצים לנחש פתרון למשוואה הלא הומוגנית, אנחנו מנחשים פתרון שהוא מהצורה של f (כלומר של מה שנמצא באגף ימין של המשוואה הלא-הומוגנית). אם ניחוש כזה פותר את המשוואה ההומוגנית אז הוא מאפס את צד שמאל של המשוואה ואז ברור שהוא לא יכול להוות פתרון למשוואה הלא הומוגנית (בה צד ימין לא שווה לאפס, אלא ל- f). במקרה כזה אנחנו מנחשים פתרון מצורה של $f - x$ רק שהוא מוכפל ב- x . עד כאן הכל טוב ויפה, אבל לא מסתדר ממש עם השורות עברם נכתבה הערה ארוכה ומעיקה זו. בשורות אלו, הפתרון מהצורה (הצורה היא פולינום ממעלה 1, כלומר $ax+b$) של צד ימין לא פתר את המשוואה ההומוגנית, אלא קבוע פתר את המשוואה, ובכל זאת הכפלנו ב- x . כמו כן, נאמר בכיתה שאם משוואה לינארית הייתה פותרת את צד שמאל, היינו מכפילים ב- x^2 .

לאחר שנראה כי ההערה הזו יותר ארוכה מהתרגול עצמו, נסכם:

זה בסך הכל ניחוש! הרעיון הוא לנחש פונקציה מהצורה! לא עבד? לא נורא! אז נכפיל ב- x . העיקר שאנחנו מבינים שאם יש פולינום אנחנו מנחשים פתרון מהצורה של פולינום (אפילו אם יוצא דרגה גבוהה יותר). ומה אם בטעות ניחשנו $Ax^2 + Bx + C$ במקום $Ax^2 + Bx$ כמו שאנחנו מנחשים בשורות אליהן מתייחסת הערה זו? (כלומר אנחנו מנחשים פולינום ממעלה 3 ובתרגיל ניחשנו פולינום ממעלה 2 שמוכפל ב- x) לא קרה כלום! לנחש משהו יותר כללי זה לא מזיק - פשוט במהלך הפתרון יתברר לנו ש- $C=0$.

אז כעת:

$$\begin{aligned}y_{p_2} &= A \cos(x) + B \sin(x) \\y_{p_2}' &= -A \sin(x) + B \cos(x) \\y_{p_2}'' &= -A \cos(x) - B \sin(x) \\y_{p_2}''' &= A \sin(x) - B \cos(x)\end{aligned}$$

כעת נציב ונקבל:

$$A \sin(x) - B \cos(x) - 4(-A \sin(x) + B \cos(x)) = (A + 4A) \sin(x) + (-B - 4B) \cos(x) = 3 \cos(x)$$

ולכן: $A = 0, B = -\frac{3}{5}$.

בסך הכל:

$$y_{p_2} = -\frac{3}{5} \sin(x)$$

3. עכשיו צריך לפתור את:

$$y''' - 4y' = e^{-2x}$$

אז אנחנו רוצים לנחש פתרון מהצורה: $y_{p_3} = Ae^{-2x}$ אבל כיוון שזה פתרון של המשוואה ההומוגנית, אנחנו מנחשים את הפתרון $y_{p_3} = Axe^{-2x}$. כעת:

$$\begin{aligned}y_{p_3} &= Axe^{-2x} \\y_{p_3}' &= A(e^{-2x} + xe^{-2x}(-2)) = Ae^{-2x}(1 - 2x) \\y_{p_3}'' &= A[-2e^{-2x} + (1 - 2x)(-2)e^{-2x}] = Ae^{-2x}[-2 - 2(1 - 2x)] = Ae^{-2x}[-4 + 4x] \\y_{p_3}''' &= Ae^{-2x}(12 - 8x)\end{aligned}$$

כעת נציב:

$$Ae^{-2x}(12 - 8x) - 4Ae^{-2x}(1 - 2x) = Ae^{-2x}(12 - 8x - 4 + 8x) = 8Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

ולכן $A = \frac{1}{8}$. בסך הכל:

$$y_{p_3} = \frac{xe^{-2x}}{8}$$

לסיים, הפתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית הוא:

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_h = -\frac{x^2}{8} - \frac{3}{5} \sin(x) + \frac{xe^{-2x}}{8} + c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

ספר עם הרבה תרגילים ופתרונות בנושא הוא של: Boyce & Di Prima.

תרגיל 2

יש לנו את המשוואה:

$$x^2 y'' + 7xy' + 5y = x$$

אז פותרים תחילה את המשוואה ההומוגנית:

$$x^2 y'' + 7xy' + 5y = 0$$

זו היא משוואות אוילר. (כי המקדם של כל נגזרת הוא x בחזקת סדר הגזירה). ננחש פתרון מהצורה $y = Ax^r$. בגזירות של הפונ' הזו החזקה של x תרד, אבל מוכפלת במשוואה ב- x בהתאם, ולכן החזקה לא תרד. אז:

$$y = Ax^r$$

$$y' = Arx^{r-1}$$

$$y'' = Ar(r-1)x^{r-2}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$Ar(r-1)x^{r-2}x^2 + 7Arx^{r-1}x + 5Ax^r = 0$$

מצמצמים ב- Ax^r ומקבלים:

$$r(r-1) + 7r + 5 = 0$$

$$r^2 + 6r + 5 = 0$$

הפתרונות למשוואה זו: $r_1 = -1, r_2 = -5$.

אז הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא:

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-5}$$

כעת אנחנו צריכים למצוא פתרון פרטי, אנחנו ננחש פתרון מהצורה $Ax + B$. למעשה אתם תנחשו.