

מד"ר 1 – שיעור 14

בשיעור הקודם התחלנו עם מערכת של משוואות מסדר ראשון, והראינו שמשוואה אחת מסדר n אפשר להביא למערכת של n משוואות מסדר ראשון. בעזרת פונ' וקטוריות, מערכת של n משוואות מסדר ראשון אפשר לכתוב כמו משוואה אחת (וקטורית) מסדר ראשון.

מערכת של n משוואות מסדר ראשון:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad 1 \leq i \leq n$$

(נשים לב שכל משוואה היא מסדר ראשון)

נכתוב את המערכת בצורה וקטורית.
תחילה נגדיר:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

וכעת המערכת היא:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

למצוא פתרון למערכת זה למצוא n פונ', ובצורה וקטורית זה פשוט למצוא את הוקטור y .

נזכר מה זה נזגרת של וקטור:

$$\vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

פונ' וקטורית רציפה אם כל הקורדינאטות שלה רציפות. אז אם כל f_i הן רציפות (לפי כל המשתנים - $n+1$ משתנים) אז הפונ' הוקטורית f היא רציפה.

לסיכום החזרה - בסך הכל, המשוואה בצורה וקטורית היא: $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$ (נשים לב שזה דומה

למשוואה מסדר ראשון רגילה שהייתה לנו עד עכשיו - $y' = f(x, y)$, רק שהפעם זה וקטורי)

תנאי ליפשיץ

בעבר היה לנו תנאי ליפשיץ כזה:

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq L \cdot |\Delta y|$$

ואנו מגדירים את תנאי ליפשיץ כעת בצורה הבאה:

$$|\vec{f}(x, \vec{y} + \Delta \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{y})| \leq L \cdot |\Delta \vec{y}|$$

כאשר ה"ערך המוחלט" כאן הוא הנורמה שהגדרנו, שאיננה הנורמה האוקלידית:

$$|\vec{a}| = \sum |a_i|$$

גם כאן, כמו בעבר L לא תלוי ב- x וב- y .

דוגמא

נניח שהמערכת היא מערכת לינארית. נקח מערכת מסדר שני:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1 + \sin x \cdot y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 \end{aligned}$$

(המערכת לינארית כי כל המשוואות הן לינאריות לפי y)

השאלה היא למה שווה קבוע ליפשיץ?
אז השאלה לא ממש מוגדרת היטב, כי אם זה נכון לאיזה שהוא L , זה יהיה נכון גם ל- L יותר גבוה. כוונת השאלה היא לתת איזה שהוא קבוע ליפשיץ.

אז מה צריך לעשות? נשתמש בהגדרה וניתן הערכה (כומבן נגדיל כך שזה יהיה מהצורה $(L \cdot |\Delta \vec{y}|)$).

הוקטור f שלנו הוא:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \sin x \cdot y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$$

אז כעת מה שאנו מקבלים בצד שמאל של אי השוויון שמתאר את תנאי ליפשיץ זה:

$$|y_1 + \Delta y_1 + \sin x (y_2 + \Delta y_2) - y_1 - \sin x \cdot y_2| + |2y_1 + 2\Delta y_1 - 2y_1|$$

והשאלה היא האם קיים L כך ש:

$$|y_1 + \Delta y_1 + \sin x (y_2 + \Delta y_2) - y_1 - \sin x \cdot y_2| + |2y_1 + 2\Delta y_1 - 2y_1| \leq L (|\Delta y_1| + |\Delta y_2|)$$

נשים לב שאנו משתמשים כאן בנורמה שאנו הגדרנו.

אז איזה קבוע L אפשר לקחת כך שיתקיים:

$$|\Delta y_1 + \sin x \Delta y_2| + 2|\Delta y_1| \leq L (|\Delta y_1| + |\Delta y_2|)$$

אפשר לקחת 3! נראה למה:

$$|\Delta y_1 + \sin x \Delta y_2| + 2|\Delta y_1| \leq 3|\Delta y_1| + |\Delta y_2| \leq 3(|\Delta y_1| + |\Delta y_2|)$$

יכול להיות שאפשר לקחת L שהוא קטן מ-3, אבל זה לא ממש משנה לנו.

דרך אחרת:

היינו יכולים לקחת לגזור לפי y (נזכור – זה וקטור! כלומר לפי קורדינאטות) ואז לקחת מזה מקסימום. וזה נכון לפי המשפט שפנ' מקיימת את תנאי ליפשיץ אם יש לה נגזרת לפי y חסומה (הכיוון השני לא נכון, נזכר בדוגמא הנגדית שהבאנו פעם - הערך המוחלט, שם הפונ' בכלל לא גזירה ב-0)

איך משתמשים בדרך הזו: נגזור את f לפי y (כל הפונ' - כלומר כל הקורדינאטות, צריכות להיות גזירות לפי y). אם הנגזרות שלהן חסומות בתחום מסויים אז הפונ' הוקטורית f מקיימת תנאי ליפשיץ באותו התחום.

כעת נעבור למערכת לינארית כי כל מה שנלמד בעתיד זה משוואות לינאריות. כלומר או משוואה לינארית מסדר n או מערכת לינארית של משוואות מסדר ראשון.

אנו נלמד משפט על חקירת משוואת לינארית מסדר שני ומהמשפט הזה אנו מתחילים את התיאוריה של החקירה הכללית של משוואות לינאריות.

נתסכל על המשוואה:

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

(זה משוואה לינארית כי היא לינארית לפי y)

כמו כן, נניח ש- $f(x), q(x), p(x)$ הן פונ' רציפות בקטע $\alpha \leq x \leq \beta$.

אז - קיים פתרון אחד ויחיד לבעית קושי, כלומר למשוואה (1) עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad x_0 \in [\alpha, \beta]$$

זה משפט על קיום ויחידות של פתרון לבעיה קושי (מסדר שני).

זו בעית קושי מבעית קושי למשוואה מסדר 2 – לכן יש פה יש לנו 2 תנאים נוספים (2 תנאי התחלה) במקום 1 - ואת שניהם אנו נותנים באותה נקודה. אמרנו שיעור שעבר שיש בעיות בהן מקבלים שני תנאי התחלה בנקו שונות אך אנחנו לא מדברים על זה.

מה נדע בעתיד?

- במקרה של מקדמים קבועים, אנו נלמד לפתור את המשוואה.
- עבור מקדמים לא קבועים - לומדים רק תיאוריה כללית על קיום הפתרונות ותכונות שלהם.

נחזור כעת למערכת, בפרט למערכת לינארית. כי משוואה מסדר n מעבירים למערכת משוואות, ואם היא לינארית אז המערכת היא לינארית (כלומר מערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון)

מערכת לינארית מסדר ראשון

מערכת לינארית מסדר ראשון היא מערכת מהצורה:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot y_j(x) + b_i(x)$$

זה n משוואות ל- n פונקציות. (i בין 1 ל- n)

כדי להגדיר את המערכת, אנחנו צריכים לדעת מקדמים. המקדמים הם הפונ' a, b .

מערכת זו אפשר לכתוב בצורה וקטורית:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x)$$

כאשר:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

תכף נכנס קצת למספרים מרוכבים, אז נזכר שניה בנוסחת אויילר

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

(תכף != השיעור הזה או הבא אחריו)

דוגמא

מה היא המטריצה A מהדוגמא הקודמת שלנו?

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin x \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה:

עכשיו השאלה: אם a_{ij} הן פונ' רציפות באיזה שהוא קטע - האם המערכת מקיימת את תנאי ליפשיץ בקטע הזה.

כלומר האם f שהיא $\vec{f} = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x)$ מקיימת את תנאי ליפשיץ? התשובה היא כן.

אפשר לבדוק את זה לפי גזירה של אגף ימין לפי y . או שנבדוק ישר. אז בואו נעשה את זה! (ישר)

צד ימין של אי השוויון שמתאר את תנאי ליפשיץ הוא:

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij}(y_j + \Delta y_j) - \sum_j a_{ij} \cdot y_j + b_i - b_i \right|$$

והשאלה היא האם קיים L כך ש:

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij}(y_j + \Delta y_j) - \sum_j a_{ij} \cdot y_j + b_i - b_i \right| \leq L \cdot \sum_i |\Delta y_i|$$

אז מה יש לנו בצד שמאל (נשים לב כי דברים קצת מצטמצמים):

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij} \Delta y_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |\Delta y_j| \leq \dots$$

הפונ' רציפות, אז בקטע סגור קיים להם מקסימום, נסמן:

$$\max_{i,j, x \in [\alpha, \beta]} |a_{ij}(x)| = k$$

ונמשיך:

$$\dots \leq k \cdot \sum_i \sum_j |\Delta y_j| = k \cdot \sum_i \sum_j |\Delta y_j| = k \cdot n \sum_j |\Delta y_j|$$

ואז נבחר את L להיות $L = k \cdot n$. (הערה: אפשר לעשות הערכות יותר טובות)

אם מערכת מקיימת את תנאי ליפשיץ, אז בעיית קושי זה לתת למערכת n תנאים. במקרה כזה נוכל להשתמש במשפט קיום ויחידות קיים פתרון לבעיית קושי (למשוואה מסדר n).

בעיית קושי למערכת בצורה כללית זה:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

בצורה חיצונית זה נראה כמוביעת קושי למשוואה מסדר ראשון.
משוואה מסדר n אנחנו יכולים להעביר למערכת כזו. נראה זאת עבור:

משוואה לינארית מסדר 2

כעת נעשה את זה עבור המשוואה:

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

עכשיו אנחנו נראה איך להעביר משוואה מסדר שני לשתי משוואות מסדר ראשון (כלומר למערכת של 2 משוואות מסדר ראשון) אז יש לנו משוואה אחת מסדר שני, נבצע שינוי משתנים.

נסמן:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

ואלה הם משתנים חדשים.
בצד שמאל יש לנו את וקטור הפתרון (אם נשים את צדדי ימין אחד מתחת לשני).

וכעת:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d}{dx}(y') = y'' \Rightarrow \text{נציב ב- (1)} \\ &= f - py' - qy = f - py_2 - qy_1 \end{aligned}$$

ובסך הכל המערכת היא:

$$(1)' \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f - qy_1 - py_2 \end{cases}$$

והיא שקולה למשוואה (1) שהיא מסדר שני:

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

קיבלנו מערכת של 2 משוואות מסדר ראשון ששקולה למשוואה אחת מסדר שני.

איפה נכנסים כאן תנאי ההתחלה?

אם היה לנו:

$$\begin{cases} y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

אז התנאים עוברים להיות:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = a \\ y_2(x_0) = b \end{cases}$$

המסקנה מתיאוריה כללית למערכת של n משוואות לינאריות - **משפט עבור בעית קושי מסדר n** :
קיים פתרון אחד ויחיד למשוואה מסדר n עם תנאי התחלה (n תנאים על אותה נקודה).