

מד"ר 1 - שיעור 23

משוואות מסדר n עם מקדמים קבועים

מה אנחנו הולכים לעשות בסעיף זה?

- לסיים את התרגיל מהשיעור הקודם.
- להסביר מדוע אם יש שורש כפול אז פתרון שהוא מוכפל ב- x גם מהווה פתרון (ובכך אנחנו יכולים למצוא n פתרונות שונים אפילו שיש פחות מ- n שורשים שונים [כי חלק מהם כפולים]).
- נראה שפתרונות ש"מיצרים" בשיטה הזו (השיטה = לכל שורש r של הפולינום האופייני להגיד ש- e^{rx} הוא פתרון, ואם הוא שורש כפול להוסיף את הפתרון xe^{rx} , ואם הוא משולש [כלומר כפול 3 פעמים] להגיד שגם $x^2 e^{rx}$ הוא פתרון וכו') הם פתרונות בלתי תלויים.
- להראות שהם בסיס למרחב הפתרונות (ע"י שנראה שוב שבת"ל $= <$ מהווים בסיס)

נזכר שכדי למצוא פתרון למשוואה לינארית הומוגנית, יש למצוא מערכת בסיסית שמהווה בסיס למרחב הפתרונות. בשיעור האחרון ראינו דוגמא של איך לפתור משוואות לינאריות מסדר n עם מקדמים קבועים (בהנחה שאנחנו יכולים לפתור פולינומים).

נסיים את מה שהתחלנו בסוף השיעור שעבר. המשוואה הייתה:

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

אנחנו מחפשים פתרון ("מנחשים") מהצורה של פונקציה מעריכית, e^{rx} . מציבים את זה כדי למצוא את r ומקבלים: $\mathcal{L}(e^{rx}) = p(r) \cdot e^{rx}$ כאשר $p(r)$ הוא הפולינום האופייני. במקרה הזה:

$$p(r) = r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

ניתן לראות שמעלת הפולינום היא כסדר של המשוואה. בכל התרגילים שנקבל נוכל עם כל מיני טריקים אלגבריים לפתור את הפולינומים. במקרה הזה לדוגמא, רואים ש- $(r-1)$ מחלק את הפולינום. אז פותרים את המשוואה הריבועית, ובסופו של דבר מקבלים: $r_1=1, r_2=1, r_3=-2$. אז יש שני שורשים שונים: $1, -2$, כאשר 1 הוא שורש כפול. לכן הפתרונות הם:

$$e^x, xe^x, x^{-2x}$$

איך הגענו לפתרון האמצעי? אנחנו מנצלים את העובדה שאם יש שורש כפול אז הוא שורש של הגזרת של הפולינום. אנו נראה את זה. נראה את זה למקרה הספציפי הזה, אבל יהיה ברור למה זה נכון למקרה הכללי.

אז יש לנו:

$$h) \mathcal{L}(e^{rx}) = p(r) e^{rx}$$

זה הוא שוויון שהוא נכון בכל מקרה (בלי קשר האם r הוא שורש או לא). כעת בגלל השורש הכפול:

$$p(r_1) = 0, \quad \left. \frac{dp(r)}{dr} \right|_{r=r_1} = 0$$

אז כעת נגזור את שוויון (1) לפי r (כעת זו תהיה נגזרת חלקית כי השוויון הזה הוא בין פונ' של 2 מתשנים - x ו- r):

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} = p'(r) \cdot e^{rx} + p(r) \cdot x \cdot e^{rx}$$

גם זה שוויון שהוא תמיד נכון בלי קשר לזה ש- r_1 הוא שורש כפול. עכשיו נשתמש בעובדה הזו (היותו שורש כפול):

$$\left. \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \underbrace{p'(r_1)}_0 e^{r_1 x} + \underbrace{p(r_1)}_0 x e^{r_1 x}$$

ולכן אנחנו מקבלים:

$$(2) \quad \left. \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0$$

עכשיו אפשר לחשב למה שווה הנגזרת הזו (צד שמאל של שוויון (2)). אז נבדוק למה שווה $\frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r}$.

נעשה את זה עבור אופרטור L כללי עבור משוואה לינארית הומוגנית מסדר 3 (כלומר במקרה הזה:

$$Ly = y'''' + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y'$$

האופרטור שלנו: $Ly: y \rightarrow p(x)$). אנחנו נעשה את זה רק למקרה של סדר 3 אך אחרי זה להרחיב את זה לכל סדר זה בקלות:

$$\frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial^3 e^{rx}}{\partial x^3} + a_1 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 e^{rx}}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial e^{rx}}{\partial x} + a_3 \frac{\partial}{\partial r} e^{rx}$$

בשוויונות האחרונים הנגזרת לפי x היא חלקית ולא רגילה מכיוון שיכול להיות ש- y היא פונקציה של כמה משתנים (כמו במקרה שלנו - x ו- r).

כדי לפתח את זה ננצל את העובדה ש- e^{rx} היא פונ' גזירה מכל סדר, ולכן אפשר להחליף את סדר הגזירה (אז נוכל כעת קודם לגזור לפי r ורק אחרי זה לפי x):

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x e^{rx}) + a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x e^{rx}) + a_2 \frac{\partial}{\partial x} (x e^{rx}) + a_3 (x e^{rx})$$

ובסך הכל מקבלים:

$$(3) \frac{\partial}{\partial r} L(e^{rx}) = (xe^{rx})''' + a_1(xe^{rx})'' + a_2(xe^{rx})' + a_3(xe^{rx})$$

(האיקסים הקטנים למטה מסמלים שהנגזרת נעשה לפי x)
לפי שוויון (1) זה גם שווה לאפס. לכן מ- (1) ו- (3) נובע כי xe^{rx} פתרון למשוואה שלנו.

מה עשינו בסך הכל - השתמשנו בעובדה ששורש כפול הוא שורש של הנגזרת של הפולינום.

שאלה: האם הפתרונות שקיבלנו - e^x, xe^x, x^{-2x} מהווים מערכת בסיסית. אנחנו אמנם שואלים את זה ספציפית לתרגיל הזה, אבל כמובן שהתשובה תהיה כללית. אז נתחיל תחילה בכך שנראה את זה ספציפית עבור הדוגמא הזו (השלישיה הזו) ואחרי זה נשחזר מה עשינו באופן כללי.

אפשר לענות על השאלה הזו באמצעות שנבדוק האם הפונקציות הללו הן בלתי תלויות (אם הן בת"ל אז כל פתרון הוא קומבינציה לינארית שלהן). איך בודקים את זה? אפשר לחשב את הורונסקיאן, אבל זה יהיה מסובך עבור n כללי. לכן נעשה את זה ישירות. כלומר השאלה שלנו היא האם קיימי קבועים c_1, c_2, c_3 כך ש:

$$c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} \equiv 0 \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$$

אז:

$$(c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-2x} \equiv 0$$

כלומר המקדמים של הפונקציות המעריכית הם פולינומים (לראשון זה פונ' לינארית ולשני זה קבוע, אבל במקרה הכללי יכולים להיות פולינומים יותר מורכבים). נחלק ב- e^x ונקבל:

$$(c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-3x} \equiv 0$$

האם זה אפשרי? (טוב במקרה הזה רואים שברור שלא, כי פונ' מעריכית היא לא פולינום, אבל נעשה את בדרך עבור המקרה הכללי). נגזור לפי x:

$$c_2 + c_3(-3)e^{-3x} = 0$$

נגזור שוב:

$$9c_3 e^{-3x} = 0$$

ואז קיבלנו ש- $c_3 = 0$. באותה דרך אפשר לעשות את זה לכל המקדמים. איך? באופן כללי היה לנו:

$$q_1(x) e^x + q_2(x) e^{-2x} = 0$$

נניח שאחד הפולינומים יש לו דרגה מסוימת (כלומר הוא לא פולינום האפס) אז מחלקים בפונק' מעריכית שהפולינום מוכפל בה וגוזרים (ואז נקבל שהפולינום הוא זהותית אפס. פה הפולינום שלנו היה הקבוע c_3 אז היה מעט קשה לראות את זה).

כעת נעשה את זה בצורה חצי כללית וחצי שוב נגיד שעשינו את זה כבר למקרה פרטי (אפילו נחזור מעט אחורה ונתחיל כללית כבר משם).

אנחנו מחפשים בסיס למרחב הפתרונות למשוואה ההומוגנית.

מגדירים את האופרטור:

$$L y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

והמשוואה היא:

$$L y = 0$$

אז מחפשים פתרון מהצורה e^{rx} :

$$L(e^{rx}) = p(r) \cdot e^{rx} \quad p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n r$$

ומקבלים את המשוואה: $p(r) = 0$.

מה שידוע לגבי פולינומים - יש להם מספר שורשים, חלקם יכולים להיות ממשיים, חלקם יכולים להיות מרוכבים. כמו כן, חלק מהשורשים יכולים להיות כפולים. אנו נתייחס למקרה הכללי - של מקדמים מרוכבים.

אז קיימים $s < n$ שורשים שונים, ונסמן את הריבויים שלהם ב- $m_1, \dots, m_s$. למה שווה הסכום שלהם? אנחנו יודעים ש: $m_1 + \dots + m_s = n$.

כעת:

$$p(r_1) = 0, p'(r_1) = 0, \dots, p^{(m_1-1)}(r_1) = 0$$

זה נכון לכל r_i . ככל שהריבוי יותר גבוה, כך יש יותר נגזרות שמתאפסות בנקודה הזו. איזה פתרונות מתאימים לשורש r_1 ?

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{r_1 x}$$

אנחנו מקבלים פה m_1 פתרונות.

עבור r_2 :

$$e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{r_2 x}$$

כל שורש, נכנסים מספר פתרונות לפי הריבוי שלו.

אז בסך הכל כמה פתרונות קיבלנו? $m_1 + m_2 + \dots + m_s$ שאנחנו יודעים שזה שווה ל- n .

קיבלנו n פתרונות, והעובדה שהם פתרונות מבוססת על זה שנגזרות של הפולינום היא אפס בריבויים (ההוכחה היא בדיוק אותו דבר כמו בדוגמא, לא בא לנו לעשות לזה הוכחה כללית עם אינדקסים). אז עולה השאלה האם זה בסיס ואז צריך להוכיח שהפונ' האלו בת"ל (לבדוק ורונסקיאן זה מסובך). להוכיח שהם בת"ל - שוב זה כמו בדוגמא ולא בא לנו לעשות את זה למקרה הכללי. נזכר:

את הקומבינציה הלינארית של הפתרונות שנבעו מ- r_1 אפשר להציג כך:

$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_{m_1} x^{m_1-1}) e^{r_1 x}$$

כלומר פולינום כפול $e^{r_1 x}$.

אז באופן כללי אפשר להציג את הקומבינציה הלינארית של כל הפתרונות:

$$Q_1(x) e^{r_1 x} + Q_2(x) e^{r_2 x} + \dots + Q_s(x) e^{r_s x} = 0$$

אז כמו קודם - נניח שאחד הפולינומים שונה מאפס. נניח עכשיו שזה Q_s .

כלומר אנחנו מניחים כי:

$$Q_s = a x^l + \dots$$

ונוכיח ש- $a=0$. אז מחלקים ב- $e^{r_1 x}$ ומקבלים:

$$Q_1(x) + Q_2(x) e^{(r_2-r_1)x} + \dots + Q_s(x) e^{(r_s-r_1)x} = 0$$

נגזור מספיק כדי להעלים את $Q_1(x)$, נחלק בחזקה הבא של e (כלומר בשלב הבא אנחנו מחלקים ב- $e^{(r_2-r_1)x}$ וגוזרים הרבה כדי להעלים את $Q_2(x)$ ועוד פולינומים שנוצרו בעקבות הגזירות שנעשו להעלמת $Q_1(x)$ וכך עד שמקבלים:

$$P(x) + Q_s(x) e^{(r_s-\dots)x} = 0$$

כעת אחרי מספיק גזירות, המקדם a נשאר (בכל גזירה מוכפל במשהו שונה מאפס), עושים את זה s פעמים ואז מגיעים ל:

$$\tilde{a}_s e^{\gamma x} = 0$$

כאשר: $\gamma \neq 0$, $\tilde{a}_s = a B x^l + \dots$ (כך ש: $B \neq 0$). זה כל מיני קבועים שנדחפו בעקבות כל הגזירות ולכן נקבל כי $Q_s(x) \equiv 0$ ולכן $a=0$.

השאלה שעולה האם זה באמת בסיס למרחב הפתרונות, כלומר האם כל פתרון אפשר להציג כקומ' שלהם.

אנחנו קיבלנו n פתרונות בת"ל, האם זה אומר שאפשר להציג כל פתרון כקומבינציה לינארית של n הפתרונות הללו?

משפט

כל פתרון למשוואה ההומוגנית $Ly=0$ אפשר להציג כקומבינציה לינארית של n הפתרונות שמצאנו. בניסוח כללי יותר: כל פתרון למשוואה ההומוגנית $Ly=0$ אפשר להציג כקומבינציה לינארית של n פתרונות בת"ל למשוואה.

הוכחה

למעשה אנחנו מוכיחים שוב שבת"ל של n פונקציות מביא להיותן בסיס למרחב הפתרונות. נניח כי הפתרונות שמצאנו הם $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. נקח פתרון כלשהו φ (נניח ש- $L\varphi=0$). השאלה היא האם אפשר לכתוב:

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$$

אז נסתכל על הנגזרות של הפתרון שלנו בנקודה מסוימת:

$$\varphi(x_0) = \alpha_1, \varphi'(x_0) = \alpha_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

כעת כדי ש- $\varphi(x) = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$ צריך להתקיים (כלומר לפחות הכרחי שיתקיים):

$$\sum c_k \varphi_k(x_0) = \alpha_1$$

$$\sum c_k \varphi_k'(x_0) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\sum c_k \varphi_k^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

זו מערכת (אלגברית, ממש של מספרים ומשתנים עבור מספרים) עבור המשתנים c_k . כעת נוכל להשתמש באלגברה לינארית. פתרון קיים (והוא יחיד) אם"ם דט' שונה מאפס, כלומר אם:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \dots & \varphi_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W \neq 0$$

ולכן קיים פתרון, כלומר קיימים $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ כאלה שמהווים פתרון. צריך לבדוק שאם נקח את ה- c -ים אנחנו נקבל את אותו הפתרון. את זה עושים לפי משפט היחידות. את האי שוויון האחרון אנחנו יודעים מכיון שיש לנו משפט של שקילות בין בת"ל להיות הורונסקיאן שונה מאפס.

נסיים את ההוכחה:

נסתכל על:

$$\psi(x) = \sum \tilde{c}_k \varphi_k$$

ולפי היחידות (ערכי הנגזרות שלהן בנקודה x_0 שווים) $\psi \equiv \varphi$.

טיפול בשורשים מרוכבים

עכשיו, חוץ מזה שיכולים להיות שורשים כפולים, לפעמים יכולים להיות לנו שורשים מרוכבים. מה עושים עם שורש מרוכב? הרי אנחנו מעוניינים בפתרון ממשי.

נניח שיש שורשים מרוכבים. מה שצריך לדעת (זה מה שהיה גם בסדר 2) - אם יש שורש מרוכב אז גם הצמוד שלו הוא שורש (זה נובע כי הפולינום הוא במקדמים קבועים וממשיים). מהסיבה הזו אפשר להמיר את הצורה הכללית של הפתרון להיות ממשית.

דוגמא

אז נניח שיש לנו 2 פתרונות מרוכבים: $e^{(\lambda+i\mu)x}$, $e^{(\lambda-i\mu)x}$. כעת, אם הצורה הכללית של הפתרון היא:

$$y(x) = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x} + \dots$$

(c_1, c_2 יכולים להיות מרוכבים)

נוכל לעשות את הדבר הבא:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x} + \dots \\ &= e^{\lambda x} [c_1 (\cos \mu x + i \sin \mu x) + c_2 (\cos \mu x - i \sin \mu x)] = \\ &= e^{\lambda x} [a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x + i(\dots)] \end{aligned}$$

אז כעת כדי שזה יהיה ממשי, אנחנו צריכים שהמקדם של i יהיה 0.

אנחנו יודעים שיש c_1, c_2 כאלה. למה אנחנו יודעים שיש כזה? אם מסתכלים על משפט הקיום, בכלל לא ידענו על מספרים מרוכבים, ולכן חייבת להיות הצגה כללית בצורה ממשית של הפתרון הכללי. כלומר אפשר לעבור לבסיס אחר שהוא יהיה ממשי בלבד. מי שזה לא משכנע אותו – שפשוט ימצא את c_1, c_2 המתאימים, זה פשוט.

אז לכן "החלפנו" את שני הפתרונות המרוכבים מהבסיס ב:

$$\begin{cases} e^{\lambda x} \cos \mu x \\ e^{\lambda x} \sin \mu x \end{cases}$$

(כי עכשיו $i(\dots)=0$ ואפשר להתייחס ל- a_1, a_2 כמקדמים השרירותיים) בצורה כזו אנחנו "ממירים" את כל זוגות הפתרונות המרוכבים לזוגות של פתרונות ממשיים.

דוגמא

יש את המשוואה: $y'''' + y = 0$.

נחפש פתרון מהצורה e^{rx} ונקבל משוואה עבור הפולינום האופייני:

$$r^4 + 1 = 0$$

כמו שאמרנו, תמיד נקבל משוואות שאנחנו יכולים לפתור. נפתור. אז r מקיים את אחת המשוואות:

$$r^2 = i, r^2 = -i$$

ולכן (עבור $r^2 = i$): $r^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$. בסך הכל הפתרונות למשוואה הם:

$$r_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad r_2 = e^{i\frac{\pi}{4} + \pi}, \quad r_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad r_4 = e^{-i\frac{\pi}{4} + \pi}$$

נמשיך עם הדוגמא הזו בשיעור הבא, ונציג אותו בצורה ממשית.