

מד"ר 1 - תרגול 13

תרגול חזרה

קצת* על המבחן

במבחן יש 5 שאלות, צריך לענות על 4. המתרגל מבקש שבתחילת המחברת לכתוב איזה שאלות פתרנו.

בקשר לדף נוסחאות – אין. לגבי מחשבון – אין.
למה זה טוב לנו? (מה זה טוב לנו?) כי אם אנחנו מקבלים לעשות חישוב כמו שורש של משהו שלא מסתדר יפה – כנראה הייתה לנו שגיאה. כלומר החישובים יהיו פשוטים ("לא יותר משורש של 16").

בקשר לעירעורים – בדרך כלל המתרגל מעדיף לדבר איתנו לפני שאנחנו עושים ערעור. למה? כי אנחנו יכולים לתת רק 4 ערעורים שנכשלו ולכן אם למתרגל נראה שאין סיכוי הוא לא רוצה שנבזבז את העירעורים שלנו.

מי בודק את המבחן? חצי המתרגל וחצי המרצה. המתרגל בודק קפדני ומוצא את כל השגיאות ומוריד נקודות על כל השגיאות – "אתם רוצים ציונים טובים, אתם צריכים לעשות הכל בלי שגיאות, הכל נכון" בסוף הוא ממליץ לכתוב תשובה סופית שוב. בקיצור – שהכל יהיה מסודר. נסכם פסקה זו בציטוט:

"נוסחא אחת שווה 2000 מילים"
לאוניד קגן, 2009.

טעות חישוב גם עולה בנקודות (כנראה פחות מטעויות אחרות, תלוי).

מה לגבי התוכן של המבחן?
המתרגל חושב שיהיה חצי חצי תיאוריה תרגילים. צריך לדעת תיאוריה ברמה של ההרצאה ותרגילי הבית. הוא טוען שאנחנו למדנו רק שני משפטים – משפט הקיום ומשפט היחידות. אני טוען שלמדנו גם משפטים כמו קיום בסיס למרחב הפתרונות של משוואה מסדר שני, משפטים על גודל הבסיס ועוד.

שאלה בכיתה: האם יהיה להוכיח משהו שהוכח בכיתה?
תשובה: לא צריך ללמוד בעל פה אבל צריך לדעת. צריך לדעת את המשפט וגם את ההוכחה.

ועכשיו נעבור לתרגול. (למעשה רק בעמוד הבא)

שאלה 1

השאלה היא בקשר לגורם אינטגרציה x, y . מה התנאים שצריכים להיות כך שיהיה אפשר להשתמש בגורם אינטגרציה שתלוי ב- xy ? (איקס כפול וואי)

אנחנו יודעים שאם יש לנו את המשוואה:

$$Mdx + Ndy = 0$$

אז יכול להיות שאנחנו יכולים למצוא פונקציה פוטנציאל $\psi(x, y)$ וזה בדיוק כמו למצוא פתרון למשוואה שלנו - כי אם אנחנו יכולים למצוא פונקציה פוטנציאל אז הפתרון שלנו למשוואה הוא: $\psi(x, y) = C$

אחרי שאנחנו יודעים את זה נלך בכיוון ההפוך, נניח שיש לנו פתרון כזה ונכתוב:

$$dC = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

אנחנו רוצים ש- ψ יהיה פתרון למשוואה ולכן צריך להתקיים:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N$$

אז לא צריך למצוא סתם פונקציה, אלא למצוא פונקציה פוטנציאל שמקיימת את שתי המשוואות הללו.

כעת, למה יהיה שווה $\frac{\partial M}{\partial y}$? זה צריך להיות שווה ל:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

זה התנאי לאפשרות למצוא פונקציה פוטנציאל (וזה אומר למצוא פתרון). אז אנחנו לוקחים את המשוואה ובודקים את התנאי:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

מחדוא אנחנו יודעים שהכיוון ההפוך גם נכון - אם השוויון הזה מתקיים אז אפשר למצוא פונקציה פוטנציאל.

מה הולך כאן?

די פשוט. אם אנחנו מקבלים משוואה מהצורה:

$$Mdx + Ndy = 0$$

ורוצים לבדוק האם אפשר למצוא לה פונקציה פוטנציאל (כי אז אם נשווה אותה לקבוע נקבל את הפתרון למשוואה) צריך להתקיים התנאי:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

נחזור להתסכל על המשוואה המקורית שלנו, אם נכפיל אותה ב- μ , נקבל:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

ויכול להיות שלמשוואה החדשה הזו השוויון שלנו $(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x})$ מתקיים, וזה אומר שיכול להיות שאנחנו יכולים למצוא גורם אינטרציה שהופך את המשוואה למדוייקת ובכך לפתור את המשוואה.

מה התנאי ש- μ יהיה גורם אינטרציה? זה התנאי:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{M}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{N}{\partial x} \right) \quad (*)$$

ל- μ כללי התנאי הזה לא ממש פשוט. אבל אם נבחר μ כפונקציה רק של x או רק של y או של המכפלה שלהם (או מקרים פרטיים אחרים) יתכן ונקבל דברים יותר קלים.

למשל נניח שיש לנו M כזו כפונקציה של המכפלה, נראה מה התנאי כדי שמיו כזה יהיה גורם אינטרציה? נגזור לפי כללי הגזירה כשאנחנו יודעים את המבנה של μ :

כלומר אנחנו מניחים:

$$\mu = \mu(xy)$$

ואז נוכל לפשט את (*):

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \mu' x = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \mu' y$$

(כאשר μ' הוא נגזרת של μ לפי המשתנה היחיד שלו - xy . יותר נוח להתסכל כל $\mu = \mu(t)$ כאשר $t = xy$ ואז גם רואים איך קיבלנו את המשוואה האחרונה)

ועכשיו נעשה קצת אלגברה:

$$\mu' (Mx - Ny) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

וכעת נקבל כי:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$$

מה שכתוב בשמאל זה פונקציה של משתנה אחד. איזה משתנה? xy . לכן צד ימין צד להיות

פונקציה של משתנה אחד - xy . אז זה התנאי! שהביטוי $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$ יהיה פונקציה של xy .

ולמעשה יש לנו כאן גם תשובה איך למצוא את μ , כי:

$$(\ln \mu)' = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = f(xy)$$

אז במקרה זה:

$$\mu(t) = e^{\int_0^t \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} dxy}$$

וכתבנו 0 כי האינטגרל מוציא לנו קבוע ואנחנו בחרנו אותו בזה שקבענו את הגבול.

שאלה 2

למצוא פתרון למשוואה:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y-h(x))} + h'(x)$$

מה עושים כאן? כותבים:

$$y' - h'(x) = (y - h(x))' = \frac{f(x)}{g(y-h(x))}$$

נעשה שינוי משתנה:

$$w = y - h(x)$$

ונקבל:

$$w' = \frac{f(x)}{g(w)} = \frac{dw}{dx}$$

וזו היא משוואה שאפשר לעשות בה הפרדת משתנים:

$$g(w)dw = f(x)dx$$

$$\int_0^w g(s)ds = \int_0^x f(s)ds + C$$

כדי שזה יהיה פתרון עבור y (ולא w) אז:

$$\int_0^{y-h(x)} g(s)ds = \int_0^x f(s)ds + C$$

מה שיש פה זה הפתרון שאנחנו מחפשים.

למה עשינו אינטרגל מסויים. אם נעשה אינטרגל לא מסויים? כי אנחנו צריכים y כפונקציה של x , נניח נרצה למצוא את ערך הפונקציה עבור $x=100$, מהאינטרגל הלא מסויים אנחנו לא מסוגלים למצוא את הערך של y בנקודה זו.

אז איך במסויים נחשב? נניח גילינו ש- $C=0$. אז אנחנו מחשבים את האינטרגל מצד ימין עד 100, ואז את צד ימין עד $y-h(100)$ ואז מזה למצוא את y (נבודד אותו).

שאלה 3

אם יש לנו n פונקציות $f_1, \dots, f_n$ שהן פונקציות מ- R , ל- R (ממשיות של משתנה אחד). טענה: אם הן בת"ל מעל R אז הן בת"ל מעל C .

הידעת?

במבחן יש חישובים עם מספרים מרוכבים, אז צריך לדעת אותם.

מה זה אומר שהן בת"ל מעל R ? לפי הגדרה, אם יש לנו סכום כזה:

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

(כאשר $a_1, \dots, a_n \in R$) אם הוא נכון אז:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

כעת מעל המרוכבים מדובר על $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

נוכיח בשלילה: נניח שיש $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ לא כולם אפס כך שהסכום הזה שווה לאפס. אם כך, נרצה לכתות את אותו השוויון למספרים הצמודים:

$$\overline{a_1 f_1 + \dots + a_n f_n} = \overline{0} = 0$$

וכעת:

$$\overline{a_1} \overline{f_1} + \dots + \overline{a_n} \overline{f_n} = 0$$

בגלל ש- f הן פונקציות ממשיות אז:

$$\overline{a_1} f_1 + \dots + \overline{a_n} f_n = 0$$

עכשיו נסכום את זה על השוויון:

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

ונקבל:

$$(a_1 + \overline{a_1}) f_1 + \dots + (a_n + \overline{a_n}) f_n = 0$$

מה אפשר להגיד על הסכומים בסוגריים? הוא ממשי. לכן צריך להתקיים:

$$(a_1 + \overline{a_1}) = \dots = (a_n + \overline{a_n}) = 0$$

וכעת נחסיר בין השוויונים ונקבל:

$$(a_1 - \overline{a_1}) f_1 + \dots + (a_n - \overline{a_n}) f_n = 0$$

לזה אין חלק ממשי, אלא רק מדומה. נכפול ב- i . צד ימין עדיין 0. ונקבל שהמקדמים הן ממשיים:

$$i(a_1 - \overline{a_1}) f_1 + \dots + i(a_n - \overline{a_n}) f_n = 0$$

ולכן:

$$i(a_1 - \overline{a_1}) = \dots = i(a_n - \overline{a_n}) = 0$$

נחלק את השוויון האחרון ב- i .

כעת נסתכל על שתי המשוואות:

$$a_i + \overline{a_i} = 0$$

$$a_i - \overline{a_i} = 0$$

מתי זה יכול להיות? רק אם $a_i = 0$. וזה נכון לכל i . סתירה שהם שונים מאפס. ובכך סיימנו.

היה אפשר גם לפרק את ההצגה של כל a_i ל- $a_i = b_i + i c_i$ ולהשוות חלק ממשי ומדומה לאפס ולקבל את אותה תוצאה יותר מהר ובפחות סיבוכי.

שאלה 4

הוצאת שורש עם ממספרים מרוכבים. עם הקוראים הסליחה ששאלה זו לא תסוכם. צריך לדעת להוציא לכל מספר מרוכב שורש מכל סדר (שלם) שהוא.

שאלה 5

נפתור את שאלה 10 מתרגיל 8. השאלה:

$$8. \text{ מצא מספרים ופונקציות עצמיים ל- } y'' + 10y = \lambda y \text{ אם } y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \text{ (} 0 \leq x \leq 1 \text{)}$$

אז צריך למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות (כי זה מה שביקשו בשאלה).

נתונה המשוואה:

$$y'' + 10y = \lambda y$$

ותנאי ההתחלה:

$$y(0)=0, y'(1)=0$$

עד כאן היה קל. כעת נשים לב שתמיד יש פתרון טריוויאלי. המטרה היא למצוא פתרון לא טריוויאלי. לפונקציה שנמצא נקרא פונקציה עצמית, ול- λ נקרא ערך עצמי.

נשים לב: זו היא בעיית שטרום-ליוביל!*

נעביר אגף:

$$y'' + (10 - \lambda)y = 0$$

ננחש פתרון $y = e^{rx}$ (ודאו שברור לכם למה אנחנו מנחשים זאת) ונציב:

$$r^2 + (10 - \lambda) = 0$$

$$r = \pm \sqrt{\lambda - 10}$$

וכעת יש לנו מספר מקרים:

1. $\lambda > 10$:

$$y = ae^{\sqrt{\lambda - 10}x} + be^{-\sqrt{\lambda - 10}x}$$

ואז נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = a + b = 0$$

$$y'(1) = a\sqrt{\lambda - 10}e^{\sqrt{\lambda - 10}} - b\sqrt{\lambda - 10}e^{-\sqrt{\lambda - 10}} = a\sqrt{\lambda - 10}(e^{\sqrt{\lambda - 10}} + e^{-\sqrt{\lambda - 10}})$$

בתוך הסוגריים יש לנו קוסינוס היפרבולי, וזו פונקציה שלא מתאפס, בסך הכל:

$$y'(1) = a\sqrt{\lambda - 10}2ch(\sqrt{\lambda - 10}) = 0$$

ch לא מתאפס, 2 גם לא. אם $a=0$ אנחנו מקבלים את הפתרון הטריוויאלי. כמו כן, אנחנו במקרה שלמדה גדול מאפס. לכן השוויון הזה לא יכול להיות חוץ מפתרון טריוויאלי. לכן בתחום זה (למדה גדול מ-0) אין לנו ערכים עצמיים. נעבור למקרה הבא.

2. $\lambda = 10$:

אנחנו מקבלים ש:

$$r_1 = r_2 = 0$$

ולכן y הוא מהצורה:

$$y = ax + b$$

וכעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = b = 0$$

$$y'(1) = a = 0$$

ושוב קיבלנו את הפתרון הטריוויאלי, שלא מעניין אותנו. גם עבור המקרה של $\lambda = 10$ - זה לא ערך עצמי.

נשאר לנו מקרה אחרון.

3. $\lambda < 10$:

במקרה זה אנחנו מקבלים כי:

$$r = \pm \sqrt{\lambda - 10} = \pm i \sqrt{10 - \lambda}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = a \cos(\sqrt{10 - \lambda} x) + b \sin(\sqrt{10 - \lambda} x)$$

כעת נציב תנאי התחלה:

$$y(0) = a = 0$$

$$y'(1) = b \sqrt{10 - \lambda} \cos(\sqrt{10 - \lambda}) = 0$$

ב אנחנו לא רוצים שיהיה שווה ל-0. $\sqrt{10 - \lambda}$ גם לא. מתי עוד זה יכול לקרות?
כאשר:

$$\cos(\sqrt{10 - \lambda}) = 0$$

כלומר:

$$\sqrt{10 - \lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k=0,1,2,\dots)$$

לאחר פישוט אנחנו מקבלים כי:

$$\lambda = 10 - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

אז אנחנו מקבלים שיש לנו ∞ ערכים עצמיים.

מה לגבי פונקציות עצמיות? נציב את הערכים העצמיים ב- y שלנו y של מקרה 3, משם הערכים העצמיים הגיעו) ונקבל:

$$f_k(x) = A_k \sin(\sqrt{10 - \lambda} x) = A_k \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right)$$

כאשר A_k הם מספרים שרירותיים - כלומר זה נכון לכל A_k .
אם מבקשים שהפונקציות צריכות להיות אורתונורמליות, אז צריך למצוא את ה- A_k המתאים כך שהגודל של הפונקציה יהיה 1, ושהפונקציות תהיינה מאונכות זה לזה.
הגדרה: פונקציות הן אורתונורמלות אם:

$$(f_k, f_n) = \int_0^1 f_k(x) f_n(x) dx = \delta_{k,n}$$

כאשר δ כאן היא הדלתא של קרונקר.

שאלה 6

נפתור את שאלה 4 מתרגיל 7, היא על קירובי פיקרד. השאלה:

4. מצאו 3 היתקרבונות Picard לפיתרון של מארכת

$$x(0) = 1, y(0) = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad (א)$$

$$x(0) = y(0) = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} = xy + 2 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases} \quad (ב)$$

אנחנו נפתור את סעיף ב'.

אז נתונה מערכת של 2 משוואות מסדר ראשון. נניח כי x ו- y הן פונקציות של t .
כמו כן, נתונים לנו תנאי ההתחלה:

$$x_0=0$$

$$y_0=0$$

איטרציות פיקרד למערכת המשוואות היא:

$$x_{n+1}=x_0+\int_0^t (x_n(s) y_n(s)+2) ds$$

$$y_{n+1}=y_0+\int_0^t (x_n(s)+y_n(s)-2) ds$$

ועכשיו פשוט מציבים בצורה איטרטיבית:

$$x_0=0$$

$$y_0=0$$

$$x_1=0+\int_0^t (2) ds=2t$$

$$y_1=0+\int_0^t (-2) ds=-2t$$

$$x_2=0+\int_0^t (2s(-2s)+2) ds=\int_0^t (-4s^2+2) ds=-\frac{4}{3}t^3+2t$$

$$y_2=0+\int_0^t (2s-2s-2) ds=\int_0^t (-2) ds=-2t$$

$$x_3=0+\int_0^t ((-\frac{4}{3}s^3+2s)(-2s)+2) ds=\frac{8}{15}t^5-\frac{4}{3}t^3+2t$$

$$y_3=0+\int_0^t ((-\frac{4}{3}s^3+2s)+(-2s)-2) ds=\int_0^t (-\frac{4}{3}s^3+2) ds=-\frac{1}{3}t^4-2t$$

שאלה 7

לגבי שדה כיוונים. למשל מבקשים מאיתנו לצייר את שדה הכיוונים:

$$y'=f(x,y)$$

אז אנחנו מציבים ערכים לדוגמא, למשל נציב את (x_0, y_0) ונקבל ש:

$$y'(x_0, y_0)=f(x_0, y_0)$$

וכעת צריך לצייר שיפוע זה בנקודה (x_0, y_0) על הגרף. כדי לעשות זאת אפשר למשל למתוח קו בין הנקודה (x_0, y_0) לבין הנקודה $(x_0+1, y_0+f'(x_0, y_0))$. עלינו להראות כמה נקודות על מנת שיהיה מה הוא שדה הכיוונים של הפונקציה.