

2.4.09

מד"ר 1 – תרגול 5

היום נמשיך לדבר על שיטת פיקרד.
הבעיה שאנו נפתור היא:

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(אנו יודעים שהפתרון הוא [לפי שיטת אחרות אנליטיות שאנו מכירים]: $y = e^{x^2}$. כעת אנו שוכחים שאנו יודעים את הפתרון)

כעת נמצא פתרון לא מדויק, בדיוק של $\varepsilon = 0.1$.
מה זה דיוק?

אז יש כמה דרכים להגדיר מרחק בין פונ' לפונ' (לפי הן נקבע הדיוק).
אנו נמצא פונ' Y_n שמקיימת:

$$|Y_n - y| < \varepsilon = 0.1 \quad \forall x \in [0, 1] \quad y \in [0, e]$$

לגבי $y \in [0, e]$ זה הוא ניחוש שלנו שהפתרון עבור x -ים בתחום זה ($x \in [0, 1]$) נמצא

בתחום $y \in [0, e]$ (אם לא ילך הניחוש, אז נגדיל את התחום עבור y).

אנו נראה ש: (הנוסחא הזו הגיעה מהאליים)

$$|Y_n - y| \leq \frac{M K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

כאשר:

$$M = \max_{\substack{x \in [0, 1] \\ y \in [0, e]}} |t(x, y)| = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e}} |2xy| = 2e$$

$$K = L = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e}} \left| \frac{\partial t}{\partial y} \right| = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e}} |2x| = 2$$

את ההוכחה נעשה כמובן באינדוקציה.

בסיס: (n=0)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x t(s, y(s)) ds \quad \text{נזכר כי:}$$

וכעת:

$$|y - y_0| = \left| \int_{x_0}^x t(s, y(s)) ds \right| \leq M$$

ולכן הטענה מתקיימת עבור $n=0$.

וכעת למעבר:

נניח כי הטענה נכונה עבור k ונוכיח עבור $k+1$:

$$\begin{aligned} |y - y_{k+1}| &= \left| \int_{x_0}^x (t(s, y(s)) - t(s, y_k(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |t(s, y(s)) - t(s, y_k(s))| ds \leq \int_{x_0}^x |K(y(s) - y_k(s))| ds \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^x \frac{M K^k (s - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} ds = \frac{M K^{k+1} (x - x_0)^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

וכעת, לאחר שהוכחנו את הטענה, עלינו למצוא n עבורו:

$$(|y - y_n| \leq) \quad \frac{M K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

בגלל ש: $x \in [0, 1] \quad x_0 = 0$ נמצא n כך ש:

$$\frac{M K^n}{(n+1)!} < \varepsilon$$

כלומר:

$$\frac{2^n}{(n+1)!} < \frac{\varepsilon}{M} = \frac{0.1}{2e} = 0.0185$$

אז אנו לא ממש יודעים לפתור את זה אנליטית, אז נעשה טבלה:

n	2^n	$(n+1)!$	$\frac{2^n}{(n+1)!}$
2	4	6	$4/6 = 0.667$
3	8	24	$8/24 = 0.333$
4	16	120	$16/120 = 0.133$
5	32	720	$32/720 = 0.044$
6	64	5040	$64/5040 = 0.0126$

אז ה- n הראשון שמתאים הוא $n=6$.

נעת יש לפתח איטרציות פיקרד עד $n=6$.

אבל מכיוון שכבר עשינו את זה בשיעורי בית, לא נפתח כאן את האיטרציות, אלא פשוט מיד

נביא את הפתרון הסופי:

$$y_6 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}$$

זהו הוא הקירוב שאנו מחפשים. אז לסיכום נוכל להגיד ש:

$$\forall x \in [0,1]. |y_6 - y| < 0.1$$

נשים לב שהקירוב שלנו לא משהו, ועדיין היינו צריכים לעשות הרבה איטרציות. אם נבקש קירוב יותר גדול, נצטרך אפילו עוד איטרציות! (זה סוג של משפט ביאוס כזה..)