2.3.09

מד"ר 1 - שיעור 1

המרצה: פרופ' שושנה קמין.

ספרים מומלצים: 1) Boyee & Di Rzima, Elementry DE and BVP

2) Petzovski I.G. ODE (בעיקר לתרגילים ודוגמאות)

3) דוד לנדין, משוואות דיפרנציאליות רגילות

4) Bizkhoff & Rota, ODE

הקיצורים:

O/DE = Ordinary/Diffrential Equations

BVP = Boundery Value Problems

הגדרה הצורה של המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה:

$$F(x,y,y'',\dots,y^{(n)})=0 \qquad (*)$$

כאשר x משתנה ו-y פונ' של x.

דוגמא: $x^2+y^2+(y')^2=1$

בקורס לא נלמד על משוואות מהצורה:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

(כאשר u פונ' של x,y)

הן נקראות משוואות דיפרנציאליות חלקיות.

הגדרה: סדר של משוואה: סדר הכי גבוה של הנגזרת שבמשוואה

ב-(*) יש משוואה לא מפורשת מסדר n.

הגדרה של מפורשת: (נגזר מסדר n)

$$y^{(n)}=F(x,y,y'',\dots,y^{(n-1)})$$

אצלנו, $y \in C^n(a,b)$ (כלומר נגזרת מסדר n רציפה)

לנושא יש שימושים בפיזיקה, מכניקה וביולוגיה. (מכניקה $\overset{?}{\subseteq}$ פיזיקה)

שאלות שנעסוק בקורס:

- האם ניתן למצוא פתרון $\underbrace{\text{מפורש}}_{}$ (להראות מהי y כפונ' של x) — בצורה מפורשת
  ברוב המקרים לא נוכל לעשות זאת.
- האם קיים פתרון למשוואה (כלומר האם קיימת y המקיימת...)
- האם הפתרון יחיד? ומה התנאים על הפתרון על מנת שיהיה יחיד.

דוגמא:

נמצא $x(t)$ איפה נמצא חלקיק בזמן t.

אם נתונה המהירות, כלומר $f(t)=\frac{dx}{dt}$.

מציאת פתרון משמעותה היא למצוא את x כפונ' של t.

במקרה זה נעשה זאת באמצעות אינטגרציה:

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + c \qquad (*1)$$

(עבור c)

איך נקבע את c? (כדי לדעת מיקום החלקיק).

אם יש לנו את מיקום החלקיק בזמן מסוים, כלומר יש לנו 2 נתונים:

$$\frac{dx}{dt}=f(t), \quad x(t_0)=x_0$$

לבעיה מסוג זה (מציאת c) נקרא בעית התחלה.

לבעיה זו בה יש 2 נתונים שאחד מהם הצבה (כלומר נקודת התחלה) נקרא גם בעית Cauchy.

כאשר נציב ב: $x(t)=\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + c$ את הנתון הנוסף:

$$x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(s)\,ds + C = 0 + C = C = X_0$$

ולכן:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + X_0 \qquad (*2)$$

(*1) נקרא פתרון כללי (פתרון עד כדי קבוע שרירותי 1)

(*2) נקרא פתרון פרטי (המוגדר ע"י תנאי התחלה)

עוד דוגמא למשוואה דיפ' - חוק ניוטון:

נתון גוף עם מסה m לפי חוק ניוטון אומר:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, x')$$

$$\left[\frac{dx}{dt} \text{ - מהירות}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} \text{ - תאוצה } \{\text{(מסמנים גם ב-}a)\}\right]$$

F במקרה זה הוא כוח.

איזה תנאי התחלה צריך על מנת לקבוע את התנועה?

מיקום התחלתי וגם מהירות התחלתית.

תת-דוגמא: נפילה חופשית. במקרה זה F הוא כוח המשיכה.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \qquad F = -mg$$

זו היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני.

נשיך:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \qquad (*2)$$

נעשה אינטגרציה פעמיים, פעם ראשונה:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1$$

שלב: $x(t)=-g\frac{t^2}{2}+c_1 t+c_2$ (*3)

זה הוא פתרון כללי (כל הפתרונות למשוואה נמצאות בו).

למה שני c_1, c_2? הדבר הטבעי הוא לתת בזמן t_0 (או 0) את הערכים של המיקום והמהירות (תנאי התחלה).

נניח נתון: $x(0)=x_0$ (הגובה ממנו נופל הגוף) (*4)

$\frac{dx}{dt}(0)=v_0$ (*5)

כדי לקבוע את הקבועים, נעזר בתנאי ההתחלה, ע"י הצבה:

$x(0)=c_2=x_0$ עפ"י (*3) עפ"י (*4)

$\frac{dx}{dt}(0)=c_1=v_0$

מצאנו את 2 הקבועים. כלומר הפתרון ל: (*2) (*4) (*5) הוא:

$$x(t)=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+x_0$$

בדר"כ מספר הקבועים השרירותיים הנכנסים לפתרון הם כסדר המשוואה.

נניח כעת $v_0=0$, אני מצפה שהגוף יפול. $x(t)=x_0-\frac{gt^2}{2}$

וניתן לראות ש: $x(t)$ יורד כמו שאנו מצפים.

מה אם $v_0>0$ (נותן) זריקה כלפי מעלה?

האם $x(t)$ יורד או עולה? אז כמצופה בהתחלה עולה (עבור t קטן) ואחר מכן יורד. פורמלית:

$v_0>0$: $x(t)\nearrow$ $t<t_1$, $x(t)\searrow$ $t>t_1$

אז דוגמה - פירוק רדיואקטיבי:

ידוע מהחוקים הפיזיקליים שאם $m(t)$ היא מסת החומר (כמות החומר) אז מהירות הפירוק פרופורציוני ל- m, כלומר:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m \qquad (*)$$

מינוס כי החומר מתפרק
כלומר נהיה פחות ממנו!

ברור שעל מנת לדעת פתרון עבור $m(t)$ צריך לדעת כמה חומר היה בזמן מסוים. נניח ש נתון:

$$m(0) = m_0$$

בניגוד לדוגמאות הקודמות, לא ניתן לעשות אינטגרציה (אם נעשה צאת נקבל משוואה אינטגרלית, איתה נתעסק בהמשך).

את הפתרון נראה בשיעורים הבאים, בינתיים הקורא החרוץ מוזמן לבדוק את הפתרון:

$$m(t) = C \cdot e^{-\alpha t}$$

אפשר להבין צורה זאת כי במשוואה $(*)$ נתון כי נגזרת המסה פרופורציונית לעצמה, ואנו יודעים שבפונקציה אקספ' זה קורה.

כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$m(0) = C \cdot e^0 = C = m_0$$

ולכן הפתרון למשוואה זו (מסדר ראשון):

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$$

שאלה

האם אפשר לתת [בנוסף שנתונה המשוואה $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ותנאי ההתחלה: $f(0) = x_0$] גם את $\frac{dx}{dt}(0) = ?$

כלומר האם אפשר לתת שני תנאים. לא!
התנאי השני נקבע מההפתרון עם תנאי ההתחלה הראשון
(אי-אפשר לתת זו עם שרירותי).

משוואות ליניאריות

המשוואה:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

היא משוואה ליניארית, אם F הוא פונ' ליניארית ביחס ל- $y, y', \dots, y^{(n)}$

הגדרה הכללית של משוואה ליניארית מסדר n:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y = f(x)$$

(כאשר $a_0, \dots, a_{n-1}$, $y, \dots, y^{(n)}$ רציפות).

הגדרה: אם $f(x)=0$ המשוואה נקראת 'משוואה הומוגנית'.

אם $f(x) \neq 0$ המשוואה לא הומוגנית.

דוגמא למשוואה ליניארית הומוגנית: $x^2 y' + y = 0$