1.6.09

מד"ר 1 – שיעור 22

משוואות לינארית מסדר n

בשיעור שעבר התחלנו עם משוואות לינארית מסדר n. הצורה הכללית היא:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=f(x)$$

כך ש: $p_i(x)\in C[a,b]$.

בצורה הכללית המקדמים (p_i) יכולים להיות פונ' של x.
מחצית מהשיעור נעשה תיאוריה של הנושא, שהיא תהיה למקרה הכללי. בסופו של דבר (ובסוף השיעור) אנחנו נפתור משוואות לינארית מסדר n רק למקרה של מקדמים קבועים.

מגדירים את האופרטור L: $Ly=f$.

קיום בסיס

משתמשים במשפט קיום ויחידות (שמבוסס על משפט קיום יחידות למערכת מסדר ראשון) לבעית קושי.
עבור נקודה $x_0\in[a,b]$. בעית קושי היא:

$$\begin{cases} Ly=f \\ y(x_0)=a_0 \quad , \quad y'(x_0)=a_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1} \end{cases}$$

על פי המשפט לבעית זו קיים פתרון יחיד.

מה שבעיקר מעניין אותנו בסעיף זה (של הוכחת קיום בסיס), היא בעית הקושי הבאה:

$$\begin{cases} Ly=0 \\ y(x_0)=0 \quad , \quad y'(x_0)=0 \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

כיוון ש- $y\equiv 0$ הוא פתרון, לפי היחידות הוא היחיד. כלומר:

$$\begin{cases} Ly=0 \\ y(x_0)=0 \quad , \quad y'(x_0)=0 \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad y(x)\equiv 0$$

האופרטור L היא לינארי והוכחנו בשיעור שעבר שקיים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואות Ly=0.
כלומר כל פתרון φ אפשר להציג כקומבינציה לינארית שלהם:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n} C_k\cdot\varphi_k(x)$$

כאשר φ_i הם איברי הבסיס. כבר כתבנו את הסכום עבור n פונ' ובאמת נראה שגודל הבסיס הוא n.
כעת נוכיח את זה שוב בצורה יותר מעמיקה.

הוכחה:

הגדרנו את הפונק' φ_i כאשר $1<i<n$ (על ידי שימוש במשפט הקיום):

$$\begin{array}{lll} L\varphi_1=0 & L\varphi_2=0 & L\varphi_n=0 \\ \varphi_1(x_0)=1 & \varphi_2(x_0)=0 & \varphi_n(x_0)=0 \\ \varphi_1'(x_0)=0 & \varphi_2'(x_0)=1 \quad \cdots & \varphi_n'(x_0)=0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0)=0 & \varphi_2^{(n-1)}(x_0)=0 & \varphi_n^{(n-1)}(x_0)=1 \end{array}$$

(x_0 היא נקודה שרירותית בתוך התחום שלנו)

כל פתרון φ_i מוגדר לפי משפט הקיום.

טענה (שראינו בסוף השיעור):

> אם יש לנו פתרון $\varphi(x)$ אז נסתכל על ערכי הנזגרות שלו ב- x_0 :
>
> $$\varphi(x_0)=\alpha_0,\ \varphi'(x_0)=\alpha_1,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}$$
>
> (נשים לב ש- α_i הם מספרים). כעת ההצגה של הפתרון באמצעות הפונקציות שהגדרנו קודם הוא:
>
> $$\varphi(x)=\alpha_0\varphi_1+\alpha_1\varphi_2+\cdots+\alpha_{n-1}\varphi_n$$

אז אנחנו טוענים זה הוא פתרון ששווה ל- φ . איך נוכיח את זה? את ההוכחה נעשה על סמך משפט היחידות. מגדירים $\psi(x)$ בצורה הבאה:

$$\psi(x)=\alpha_0\varphi_1+\alpha_1\varphi_2+\cdots+\alpha_{n-1}\varphi_n$$

זו היא קומבינציאה לינארית של הפתרונות φ_i ולכן היא פותרת את המשוואה Ly=0. נסתכל כעת על הנגזרות של ψ בנקודה x_0 :

$$\begin{array}{ll} L\psi=0 & \psi(x_0)=\alpha_0 \\ & \psi'(x_0)=\alpha_1 \\ & \vdots \\ & \psi^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1} \end{array}$$

אלה הם בדיוק אותם הנגזרות של φ . ממשפט היחידות נובע ש: $\psi(x)\equiv\varphi(x)$.
אם נשים לב, זה בדיוק הדרך שבה הוכחנו את זה שקיים בסיס עבור משוואות לינאריות מסדר שני.
בפתרון משוואות מהצורה הזו אנחנו לא נמצא בסיס בצורה כזו, זו היא שיטה טובה רק על מנת להוכיח שתמיד קיים בסיס. כמו כן, נשים לב שהבסיס לא יחיד.

ורונסיקאן

כעת, כמו שהיה בסדר שני, אנחנו מגדירים כאן ורונסקיאן.

הגדרה: ורונסקיאן של הפונ' $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בנקודה x:

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

הוא תלוי בפונקציות ובנקודה (הוא משתנה מנקודה לנקודה).

<u>משפט</u>

הפתרונות $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בת"ל אם"ם $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x) \neq 0$ עבור כל $x \in [a, b]$.

נזכור שהמשפט הזה הוא נכון רק עבור פונ' שהם פתרונות למשוואה ההומוגנית (באופן כללי אין שקילות אלא רק גרירה). לאחר שנוכיח את המשפט נחזור לנקודה הזו ונראה איזה כיוון הוא תמיד נכון.

הגדרה: הפונ' φ_i בת"ל אם: $\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \sum c_k^2 = 0$.

במהלך הוכחת המשפט נעזר במשפט מאלגברה:

משפט מאלגברה:

אם נתונה מערכת המשוואות $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (1 \le i \le n)$, נגדיר את המטריצה $A = \{a_{ij}\}$.

אם $\det A = 0$ אז קיים פתרון לא טריוויאלי (בנוסף לפתרון הטריוויאלי)

הוכחת המשפט:

<u>כיוון 1</u>

נתון ש: $\{\varphi_i\}$ היא מערכת של פונ' בת"ל. נניח בשלילה ש- $W(x_0)=0$. נתסכל על המערכת:

$$(1)\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

נשים לב לנקודה החשובה הזו: זו היא מערכת <u>אלגברית</u>. לא מערכת של משוואות דיפרנציאלית! זו היא מערכת עבור המשתנים $c_1,\dots,c_n$. (כל ה- $\varphi_i^{(j)}(x_0)$ הם המקדמים של המערכת).

נשים לב שהדט' של המערכת זה הורונסקיאן, שאמרנו שהוא שווה לאפס (עפ"י הנחת השלילה). זה אומר שקיים פתרון לא טריוויאלי, כלומר כזה שמקיים: $\sum c_k^2 \neq 0$.

אז כעת מגדירים $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ כאשר c_k הם פתרונות למערכת אלגברית (1). ולכן מקבלים ש:

$$\varphi(x_0)=0,\quad \varphi'(x_0)=0,\dots,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0$$

איך קיבלנו את זה? השוויון הראשון הוא תוצאה המשוואה הראשונה במערכת, השני מהשניה וכו'.

כמו כן, $\varphi(x)$ היא פתרון למשוואה Ly=0 (כי הוא קומבינציה לינארית של פתרונות). וכעת על פי משפט היחידות אנחנו מקבלים ש- $\varphi\equiv 0$. ולכן קיבלנו ש: $\sum c_k\varphi_k(x)\equiv 0$ כאשר לא כל ה- c_i הם אפס וזו היא סתירה לנתון שהפונ' הם בת"ל.

<u>כיוון שני</u>

נתון ש- $W\neq 0$, נראה כי $\{\varphi_k\}$ בת"ל. נניח בשלילה φ_k תלויים לינארית, כלומר קיימים c_i כך ש:

$$c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n\equiv 0 \qquad \sum c_k^2\neq 0$$

נתסכל על מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n(x_0)=0 \\ c_1\varphi_1'(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

שוב - זו היא מערכת אלגברית עבור c_i . היא שוב הומוגנית שקיים עבורה פתרון לא טריוויאלי (זו היא הנחת השלילה, לא כל ה- c_i הם 0), זה אומר שהדט' צריכה להיות 0. הדט' כאן זה W בנקודה x_0 , כלומר קיבלנו ש- $W(x_0)=0$ וזו סתירה לנתון ש- $W\neq 0$ לכל $x\in[a,b]$.

כמה מילים על איזה כיוון תמיד נכון:

הכיוון השני הוא זה שתמיד נכון. הכיוון הראשון (שבזכותו אפשר להגיד שקילות בין השניים) נכון רק כאשר מדובר על פונקציות שמהוות פתרון למשוואה לינארית הומוגנית. נשים לב שבהוכחת הכיוון הראשון אנחנו השתמשנו במשפט היחידות ובכך ניצלנו את העובדה הזו.

יכול להיות שורונסקיאן הוא אפס (במקרה שהפונ' הן לא פתרונות למשוואה לינארית הומוגנית) ומערכת היא בכל זאת מער כפונ' בלתי תלויה. הדוגמא לזה: x ו- $|x|$ הן בת"ל, אך הורונסקיאן שלהם הוא 0 (ראינו את זה באחד השיעורים הקודמים).
לגבי הדוגמא הזו, צריך לשים לב שצריך להגיד באיזה קטע מדברים. כדי לשאול האם פונ' הם תלויות או בת"ל צריך להגדיר באיזה קטע שואלים את זה. הדוגמא הזו למשל לא תעבוד עבור הקטע $[-2,-1]$, שם הפונ' הן דווקא כן תלויות לינארית: $|x|=(-1)x$. זה יקרה בכל קטע שלא מכיל את 0. אז כעת כדי להיות בסדר – נגיד שהדוגמא הקודמת שלנו דיברה על הקטע $[-1,1]$.

פתרון משוואות לינאריות מסדר n

עכשיו אנחנו עוברים למשוואה עם מקדמים קבועים ונראה כיצד לפתור אותם - זו תהיה אותה דרך שראינו עבור סדר ראשון ועבור סדר שני - אנחנו מחפש פתרון בצורה של פונקציה מעריכית.

<u>דוגמא</u>
נתונה המשוואה:

$$y^{(3)}-3y'+2y=0$$

ננחש את הפתרון e^{rx} כלומר ננחש ש- $Le^{rx}=0$ ונקבל:

$$L(e^{rx})=(r^3-3r+2)e^{rx}=0$$

את הפולינום (r^3-3r+2) נסמן ב- $p(r)$. והמשוואה האחרונה שקולה ל:

$$p(r)=r^3-3r+2=0$$

אז אין שיטה כללית לפתור את המשוואה הזו, אבל אנחנו רואים שהמשוואה מתחלקת ב- (r-1), ולכן נוכל עם קצת טריקים אלגבריים לפתור אותה בכל זאת:

$$r^3-3r+2 = 0$$
$$r^3-r-2(r-1) = 0$$
$$r(r^2-1)-2(r-1) = 0$$
$$r(r-1)(r+1)-2(r-1) = 0$$
$$(r-1)(r(r+1)-2) = 0$$
$$(r-1)(r^2+r-2) = 0$$
$$(r-1)(r-1)(r+2) = 0$$

ולכן הפתרונות למשוואה הם: $r_1=1, r_2=1, r_3=2$. ולכן בסיס הפתרונות הוא: e^x, xe^x, e^{-2x} .