4.1.09

מד"ר 1 – שיעור 10

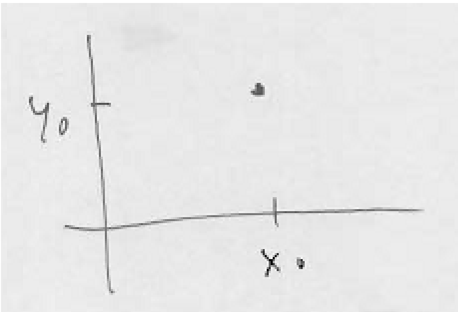
היום אנו ממשיכים עם בעית קושי למשוואה מסדר ראשון. בשיעור שעבר למדנו שהפתרון שמוגדר בקו (הקו האינטגרלי), ואם תנאים מסויימים ניתן להמשיך את הפתרון.

נראה למשוואה לינארית ניתן להמשיך פתרון לכל הציר.

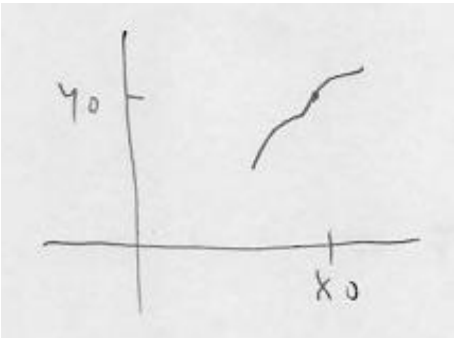
כמיטב המסורת, תחילה שוב נראה את בעית קושי:

$$\begin{cases} (1) & y'=F(x,y) \\ (2) & y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

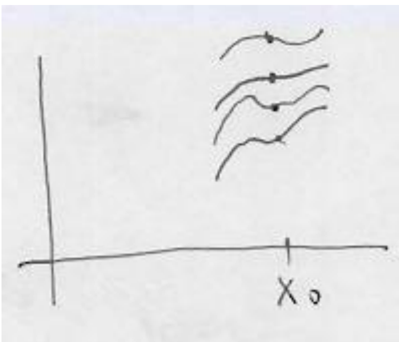
אנו מדברים עם פתרון פרטי תמיד (כהוא עובר בנקודה (x0,y0)). מבחינה גרפית, אנו מדברים על כך שיש לנו נקודה:



ואנו בונים פתרון שעובר בנקודה בסביבה כלשהיא שלה:



בהרבה שאלות מבקשים לתת פתרון כללי? מה הקשר בין הפתרון הפרטי לכללי?
כל פעם שנבחר נקודה נקבל פתרון פרטי אחר:



ואז יש לנו קבוצה של פתרונות (הם הכלליים). אם נשאיר את y0 כמו שהוא (אפשר להתייחס אליו כקבוע שרירותי), נקבל את הפתרון הכללי.

<u>משוואות לינאריות</u>

הצורה הכללית:

$$\begin{cases} (3) \quad y' = p(x)y + q(x) \\ (4) \quad y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(מעט שונה מהצורה שאז הצגנו בהגדרה, וזה יותר נוח כי זה יותר דומה לבעית קושי).
תחילה נזכר איך פותרים:

$$y' + a(x)y = b(x) \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-\int a \cdot ds}$$

אבל אנחנו נראה איך אפשר גם בלי לפתור, להראות שהפתרון קיים.
זה יהיה לנו טוב כי אז נכיר גם משוואות שאנו לא יודעים לפתור ונוכל להגיד עליהן שיש להן פתרון. (מסדרים גבוהים יותר למשל)

<u>טענה</u>

נניח ש- p(x),q(x) הן פונקציות רציפות בכל הציר (לאו דווקא חסומות). אז קיים פתרון למשוואה (3) עם תנאי התחלה (4) והפתרון הזה מוגדר על כל הציר.

כלומר אפשר להמשיך את הפתרון של המשוואה הלינארית (מבלי קשר מאיזה נקודה אנו מתחילים) לכל הישר.

הוכחה:
יהי a שרירותי. מתסכלים על: x0 - a < x < x0 + a.
תחילה נבדוק שהפונקציה f(x,y)=py+q מקיימת תנאי ליפשיץ עבור:

-a < x - x0 < a
-inf < y < inf

הערה: בשיעורים הקודמים הוכחנו קיום ויחידות לבעיית קושי במלבן. פה יש לנו פס (y לא חסום). לכן נוכיח הכל שוב מחדש. השיעור עבור המקרה הפרטי הזה. שיעור הבא נעשה זאת כללי.

אז נבדוק זאת:

$$|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| = |p(x)(y+\Delta y) - p(x)y| = |p(x)\cdot\Delta y| \le$$
$$\le \max_{|x-x_0|<a} |p(x)| \cdot \Delta y \underset{\text{נסמן}}{=} \underset{\text{קבוע ליפ' תלוי ב-a}}{L_a} \cdot |\Delta y|$$

כלומר עבור a נתון התנאי מתקיים. (נשים לב שהתוצאה שיצאה לא תלויה ב- y)

נסמן f(x,y)=p(x)y+q(x). אנו טוענים שאיטרציות פיקרד מוגדרות עבור: $\forall x \quad |x-x_0| \le a$.
(ו- y לא חסום [הקטע הוא -inf < y < inf])
נראה זאת:

איטרציה ראשונה:

$$\varphi_0 = y_0$$

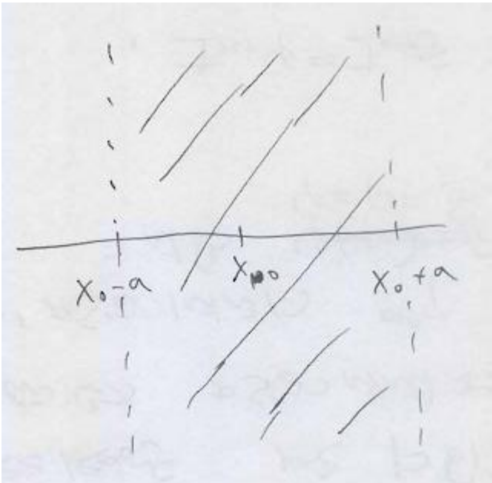
היא כמובן מוגדרת בתחום.

שניה:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\,ds$$

הערה לגבי כל ההוכחה הזו: אם נשתמש ישר במשפט שכבר הוכחנו (בו הראינו שהאיטרציות לא יוצאות מהתחום) נקבל שהתחום תלוי במקסימום של הפונ' ולכן לא נשתמש בו. ההבדל הוא ששם היה תחום מלבני וכאן התחום הוא פס (כלומר y לא חסום). מסיבה זו, גם לא יופיע כאן (בניגוד להוכחה הקודמת) הקבוע המיסטי b/M. (פה זה יהיה מוגדר לכל x שהוא במרחק x0 עד כדי a)

הפונ' באינטגרל קיימת לכל x בין x0-a ו- x0+a:



ולכן האיטרציה לא יוצאת מתחום ההגדרה.
השלישית: כנ"ל.

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_1(s))\,ds$$

(כלומר ברור באינדוקציה שכל האיטרציות לא יוצאות מהתחום [למעשה הן לא ממש יכולות לצאת מהתחום כמו במקרה המלבני, כי y לא חסום, אז הכוונה היא שהם מוגדרות])

אז כל האיטרציות מוגדרות:

$$\forall n \ \forall x \in |x - x_0| < a$$

השאלה היא האם *פי של x* מתכנסות לאן שהוא:

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{?} \quad (n \to \infty)$$

בפיקרד הסתכלנו על הטור:

$$\sum \left[\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\right]$$

והערכה שלנו לאיברי הטור הייתה:

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \le \frac{(L\cdot\alpha)^n}{n!}\cdot C$$

ואז הטור הזה מתכנס, כלומר קיים הגבול: (ואנו מסמנים אותו ב*פי של x*)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

מכיוון שזה לכל a אז יש פתרון לכל הציר.

טוב, אז נעצור כאן. חסר לנו עוד להוכיח שזה באמת מתכנס לפתרון, ושהוא יחיד (הוכחות מאוד דומות להוכחה במקרה המלבני). ב- 2 השיעורים הבאים (בעיקר השני מביניהם) נוכיח את זה בצורה מסודרת.

<u>דוגמא</u>

המשוואה:

$$y' = x^2 y$$

שעבורה הפתרון (שקיים עבור כל התחום):

$$\frac{y}{y'} = x^2 \Rightarrow y = C\cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

וכעת נעבור לנושא חדש: יציבות של פתרון.

יציבות של פתרון

יציבות זה מושג רחב. למה אנחנו צריכים את זה? ויציבות לפי מה?

אם יש לנו בעיה פיזיקלית אז בתנאי ההתחלה תמיד שגיאה.
לדוגמא יש את הבעיה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

ועולה השאלה האם כאשר משנים את y0 מעט (כי הוא מגיע מניסויים) הפתרון משתנה מעט?
זו היא יציבות ביחס לתנאי התחלה.

אפשר לשאול את זה בצורה הבאה:
נניח שיש לנו את המשוואה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1') \\ y(0) = y_{0,\varepsilon} & (2') \end{cases} \qquad \left(|y_{0,\varepsilon} - y_0| < \varepsilon \right)$$

השאלה היא האם:

$$|y(x) - y_\varepsilon(x)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{?} 0$$

($y_\varepsilon(x)$ פתרון ל-$1',2'$)

ביחס לעוד מה אפשר לבקש יציבות? אפשר ביחס לאגף ימין, כלומר כאשר f משתנה קצת:

$$|f_\varepsilon(x,y) - f(x,y)| \overset{?}{<} \varepsilon$$

אנו נתחיל להתעסק עם יציבות לפי תנאי התחלה, ובסוף השיעור נראה יציבות לפי f.

<u>דוגמא</u> (ליציבות לפי תנאי התחלה)

$$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_0+\varepsilon \end{cases}$$

$$y=y_0e^x \qquad y_\varepsilon(x)=(y_0+\varepsilon)\cdot e^x = y(x)+\varepsilon\cdot e^x$$

אז הפתרון הזה יציב הצורה לוקלית (כלומר בקטע חסום), והוא לא יציב על כל הציר.
(הפתרון שלנו עולה ולכן גם לא נצפה ליציבות גלובלית).
יש גם מושג שנקרא יציבות יחסית, כלומר יציבות ביחס לפתרון, ופתרון הזה הוא יציב יחסית:

$$\frac{y_\varepsilon - y}{y} = \frac{\varepsilon}{y_0} \to 0$$

אך אנחנו לא נכנס לזה.

אז באופן כללי התשובה היא שיש יציבות לוקלית (כאשר יש לנו את התנאים על f של רציפות וליפשיץ לפי y). (המשפט הזה כאילו היה ספויילר). ננסח זאת בצורה מסודרת ונוכיח זאת.

<u>משפט</u>

אם f(x,y) פונ' רציפה במלבן:

$$R_0 = \begin{cases} |x-x_0|\le a \\ |y-y_0|\le b \end{cases}$$

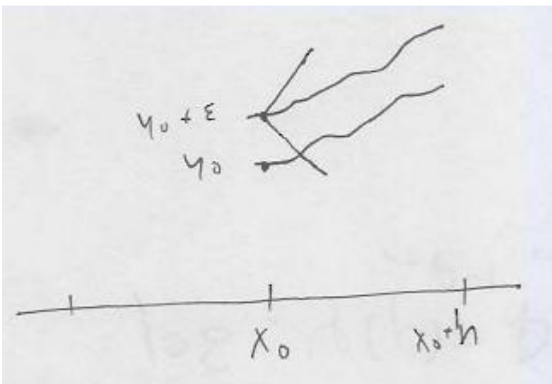
וקיימת $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה במלבן (כלומר מתקיים תנאי ליפשיץ),

אז:
קיים h מספיק קטן כך ש: $y_\varepsilon(x)\to y(x)$ במידה שווה עבור $|x-x_0|\le h$.

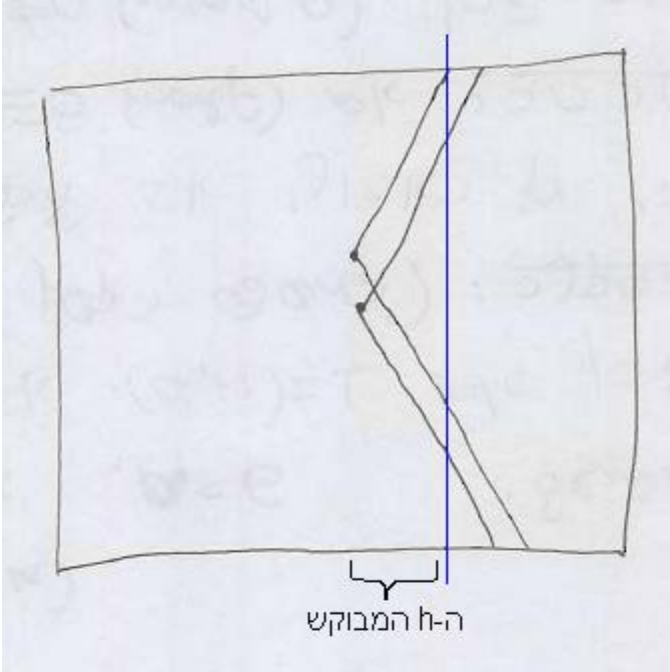
זה לגבי יציבות ביחס לתנאי התחלה (כלומר אותו f ותנאי התחלה שונה עד כדי *אפסילון*)

הוכחה:

1. קיים h, כך שלכל *אפסילון* [שקטן ממספר מסויים – *אפסילון0*] קיים פתרון $y_\varepsilon(x)$ בקטע $|x-x_0|\le h$. שרטוט:



זה לפי משפט על קיום ויחידות של בעית קושי.
נראה זאת תחילה בצורה גרפית ולאחר מכן אלגברית. גרפית:



הנקודה באמצע היא:
(x0, y0)
והנקודה מעליה היא:
(x0, y0 + eps0)

ברור כי לנקודות (x0, y0 + eps)
כאשר eps < eps0, קיים פתרון
עבור ה- h הזה.

כש*אפסילון* שואף לאפס הקטע שואף לקטע המקורי.

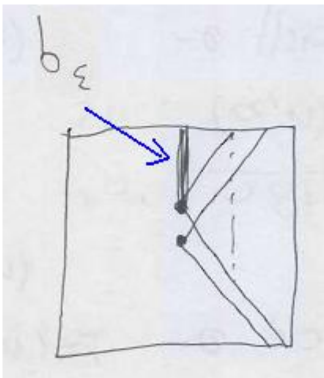
$y_\varepsilon(x)$ מוגדר בקטע של x:

$$|x-x_0| \le \min\{a, \frac{b_\varepsilon}{M}\}$$

כאשר:

$$b = \max|y-y_0|$$

$$b_\varepsilon = \max|y-y_0-\varepsilon|$$

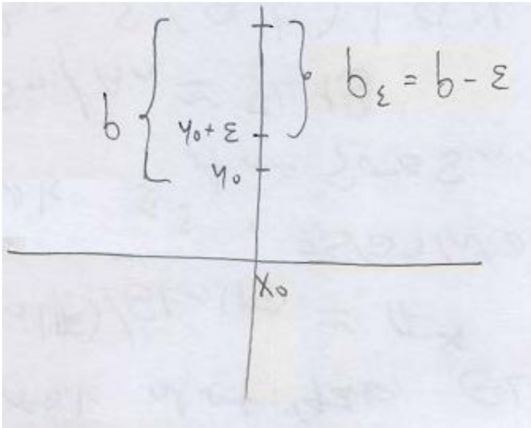


כלומר קטע יותר קטן מהקטן המקורי, אך כש*אפסילון* שואף לאפס הוא מתקרב לקטע המקורי. לגבי y, הוא בתחום הזה:

$$|y-(y_0+\varepsilon)| \le b-\varepsilon$$

$$|y-y_0| \le b-2\varepsilon$$

אז השרטוט שלנו הוא כזה:



ו:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 \qquad h_\varepsilon = \min\left\{a, \frac{b-\varepsilon}{M}\right\} \geq \min\left\{a, \frac{b-\varepsilon_0}{M}\right\}$$

2. קיים h0<h כך ש: $|y_\varepsilon - y| < 2\varepsilon$ עבור $|x - x_0| < h_0$. הוכחה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$y_\varepsilon(x) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} f(s, y_\varepsilon(s))\,ds$$

נניח ש: $|x - x_0| < h_0$ ונסתכל על ההפרש:

$$y_\varepsilon(x) - y(x) = \varepsilon + \int_{x_0}^{x} \left[f(s, y_\varepsilon(s))\,ds - f(s, y(s))\right]ds$$

את הערך המוחלט לקחנו פעמיים
(כי x יכול להיות גדול או קטן מ- x0).

$$|y_\varepsilon(x) - y(x)| \le \varepsilon + \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_\varepsilon(s)) - f(s, y)|\,ds\right| \le$$

$$\le \varepsilon + L\left|\int_{x_0}^{x} |y_\varepsilon(s) - y(s)|\,ds\right| \le \varepsilon + L \cdot h_0 \cdot \max_{[x_0 - h, x_0 + h]} |y_\varepsilon(x) - y(x)|$$

התוצאה נכונה לכל x (שבמרחק h0 מ- x0), ובפרט עבור x שנותן $\max|y_\varepsilon - y|$. מקבלים ש:

$$\max_{|x - x_0| \le h} |y_\varepsilon - y| \le \varepsilon + L h_0 \cdot \max_{|x - x_0| \le h} |y_\varepsilon - y|$$

נסמן את ההפרש ונפתח:

$$m_\varepsilon = \max_{|x - x_0| \le h} |y_\varepsilon(x) - y(x)|$$

$$m_\varepsilon \le \varepsilon + m_\varepsilon \cdot L \cdot h_0$$

$$m_\varepsilon (1 - L \cdot h_0) \le \varepsilon$$

וכעת נבחר לדוגמא $L h_0 = \frac{1}{2}$, כלומר נבחר $h_0 = \frac{1}{2L}$, ונקבל:

$$\frac{1}{2} m_\varepsilon \le \varepsilon \Rightarrow m_\varepsilon \le 2\varepsilon$$

על זה מבוססת ההוכחה של יציבות. כלומר ההפרש שואף לאפס כאשר *אפסילון* שואף לאפס.

מ.ש.ל

כלומר מזה שתנאי ההתחלה רחוק עד *אפסילון*, יצא לנו שכל הפונ' רחוקה עד כדי 2*אפסילון* (עבור h מסויים).

$$|y_\varepsilon(x_0) - y(x_0)| < \varepsilon$$

$$(\text{לכל})\ |y_\varepsilon(x) - y(x)| < 2\varepsilon$$

כלומר:

$$y_\varepsilon(x_0) \to y(x_0) \Rightarrow y_\varepsilon(x) \to y(x)$$

יציבות לפי f

כלומר אם יש לנו את המשוואות:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_\varepsilon' = f_\varepsilon(x,y) \\ y_\varepsilon(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<u>המשפט</u>: אם $f(x,y) \leftarrow f_\varepsilon(x,y)$ במידה שווה במלבן R אז $y_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} y(x)$.

להוכחה נעשה דבר דומה, נסתכל על ההפרש:

$$y_\varepsilon(x) - y(x) = \int \underbrace{f_\varepsilon(x,y_\varepsilon) - f(x,y)}\ \underbrace{-\ f_\varepsilon(x,y) + f_\varepsilon(x,y)}$$

צריך כמו קודם להעריך את ההפרש, אך ליפשיץ אינו עובד כאן כי הפונקציות שונות.

לכן נוסיף ונפחית אז זה.

ועכשיו נוכל להשתמש בליפשיץ.

כעת נסתכל על ההפרש בערך מוחלט (ונסמן אותו):

$$\underbrace{\max\left|y_\varepsilon(x) - y(x)\right|}_{\|\ (\text{נסמן})\ m_\varepsilon} \le L \cdot h_0 \cdot \max\left|y_\varepsilon - y\right| + \underbrace{\left|\int_{x_0}^{x} \left|f(s,y) - f_\varepsilon(s,y)\right| ds\right|}$$

הוא קטן בגלל ההנחה על f, כלומר הוא:

$$\le \varepsilon h_0$$

ונקבל:

$$m_\varepsilon \le \underbrace{L h_0}_{=\frac{1}{2}} m_\varepsilon + \varepsilon h_0 \Rightarrow m_\varepsilon \le 2\varepsilon \cdot h_0$$

נבחר h0 כך ש

וקיבלנו שההפרש שואף לאפס כאשר *אפסילון* שואף לאפס.

מ.ש.ל