

לוגיקה למדמ"ח – סיכום הנושאים העיקריים

1,2 **

הוכחה שמהווה הוא נוסחא – להראות בנית. שלא נוסחא – להוכיח תכונה שנשמרת (כמו מספר ")= מספר ")", בין כל שני אטומיים יש קשר וכו') ולהראות שהיא לא מקיימת.

תכונות של יחס נביעה: רפלקסיביות, מונוטוניות, טרנזיטיביות.

3 **

רק ערכי ההשמה לפסוקים האטומיים משפיעים על סיפוק הנוסחא (אם $v1, v2$ מסכימות על ϕ) $At(\phi)$ $v1 \neq v2$ ϕ

משפט ההצבה:

$$v(A\{\frac{e_1}{p_1}, \dots, \frac{e_k}{p_k}\}) = v'(A) \quad : A \text{ נוסחא}$$

$$v'(q) = \begin{cases} v(e_i) & q = p_i \quad (i=1, \dots, k) \\ v(q) & q \notin \{p_1, \dots, p_k\} \end{cases}$$

משפט הדדוקציה (ואז יש לנו: מנביעה – רדקוציה לטאוטולוגיה)
רדקוציה מנביעה לספיקות - $T \cup \{ \neg A \}$.

משפט הקומפקטיות – שני ניסוחים:

- מ- T נובע A אם מגאמא חלקי סופי של T נובע A
- T היא ספיקה אם כל גאמא חלקי סופי של T היא ספיקה

שקילות לוגית של A ו- B – כל השמה נותנת לשניהם אותו דבר. (הצבה שומרת שקילות)

4 **

הגדרת HPC – איך נראית הוכחה בו (ודוגמא להוכחה: $p1 \rightarrow p1$)

משפט התקפות והשלמות של HPC

משפט הדדוקציה של HPC (הוכחה ישירה) והכללה (נכונות לכל מערכת הוכחה עם MP כלל היסק יחיד, ואם כל האינסטנסיות של $I1, I2$ יכוחות במערכת)

הגדרת HPI, החלפת $N2$. $\neg \neg A \rightarrow A$ ב- $N2'$: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

טענה

$$\text{אם } T \vdash_{HPC} A \text{ אז } T \{B/p\} \vdash_{HPC} A \{B/p\}$$

5 **

רווחים משלמות ותקפות HPC: קומפקטיות, כריעות.
קומפקטיות – יש הרבה תרגילים בדיוק לזה.
הגדרה: T קונסיסטנטית – לא קיימת A שהיא ושלייתה נכונות (בצורה שקולה: קיים פסוק שלא יכיח בה)

6 **

NDC – הגדרת המערכת ויחס הנביעה.
תקפות מול HPC ותקפות ושלמות מול HPC.

7 **

$$A \leftrightarrow B \vdash_{CP} \psi \{A/p\} \leftrightarrow \psi \{B/p\}$$

צורת ncf – שלילה רק בצמוד לפסוקים אטומיים. - והגעה אל הצורה הזו.
CNF, DNF – והגעה אליהם.
שלמות פונקציונלית.

הגדרה

תהי פי נוסחא ויהיו $p_1, \dots, p_n$ נוסחאות אטומיות (הם משתנים עבור נוסחאות אטומיות) הכוללות את כל הנוסחאות האטומיות שמופיעות בפי.

$$\vec{g}_\psi^P(x_1, \dots, x_n) = v(\psi) \text{ הפונ' } \vec{g}_\psi^P \text{ מ-} n \text{ ערכי אמת לאחד (כלומר: } \vec{g}_\psi^P : \{x_i\}^n \rightarrow \{x_i\} \text{) כך ש: } \vec{g}_\psi^P(x_1, \dots, x_n) = v(\psi)$$

(כאשר v היא השמה כך ש: $v(p_1) = x_1, \dots, v(p_n) = x_n$) היא הפונ' שמושרה על ידי פי.

דוגמא להגדרה

נסתכל על 2 פונ' שמושורות ממנה:

$$\varphi = p_3 \rightarrow p_2$$

		$g_{\varphi}^{<p_3, p_2>}$	$g_{\varphi}^{<p_2, p_3>}$
t	t	t	t
t	f	f	t
f	t	t	f
f	f	t	t

משפט הצבת אקוויולנטיים

אם $\vdash_{\text{CPL}} A \leftrightarrow B$ אז לכל נוסחא פ' ולכל P (פסוק אטומי) מתקיים: $\vdash_{\text{CPL}} \varphi\{A/p\} \equiv \varphi\{B/p\}$

ליטרל – פסוק אטומי או שלילתו
שלמות פונקציונלית – הוכחה והפרכה.

8 **

לוגיקה רב ערכית: שלשה – ערכי אמת (לפחות 2 בדרכי), ערכים מצויינים (חלקית ממש ולא ריקה),
טבלאות אמת לקשרים.
השמה מספקת אם נותנת ערך מצוין.
הוכחה שדברים לא יכחים ב-HPI.

FOL

משותף וסיגנטורה
הגדרת מבנה

9 **

יחס התקפות והנכונות (t-סיפוק ו-v-סיפוק).
הגדרת השמה x-וריאנטית

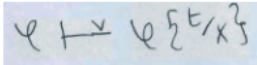
משתנה חופשי וקשור – הגדרה (Fv).
הגדרת פסוק ושם עצם סגור.

רק ערכי ההשמה למשתנים החופשיים משפיעים על סיפוק נוסחא (אם v1, v2 מסכימות על כל phi) אז

M, v_1 מספק את ϕ אם M, v_2 מספק את ϕ .
 מסקנה: פסוק או מסופק על ידי מבנה או לא.

10 **

הגדרת יחסי הנביעה.
 t -נביעה גורר v -נביעה (ההיפך נכון רק עבור T מורכבת מפסוקים)
 כלל ההכללה נכון ב- v נביעה (וההפוך כמובן נכון גם ב- t וגם ב- v).
 רדוקציות מ- t ל- v : לסגור את T .
 רדוקציה מ- v ל- t : מוסיפים קבועים חדשים ומציבים במקום המשתנים החופשיים.
 משפט הדדוקציה: נכון ל- t ונכון ל- v רק עבור **A** פסוק.

מסקנה ממשפט ההצבה:  בתנאי ש- t חופשי להצבה עבור x בפי'.

משפט ההחלפה עבור נוסחאות ועבור נוסחאות.

11 **

משפט ההצבה

$$M, v \models \phi\left\{\frac{t}{x}\right\} \Leftrightarrow M, v\{x=v(t)\} \models \phi$$

ϕ - נוסחא, x - משתנה, t - שם עצם חופשי להצבה במקום x ב- ϕ .

כריעות של אמיתות לוגיות
 NDFOL ו- HFOL. מי מתאים למי?
 הוכחת נאותות של HFOL.

12 **

משפט הדדוקציה של HFOL (הוכחה ישירה) – עובד רק כאשר A פסוק.
 נביעה לוגית ב- HFOL ו- NDFOL זה שקול (הוכחה ישירה)
 תורה שלמה (לפי ϕ או הוא או שלילתו יכחה מהתורה)
 תרגיל – הוספת קבועים לשפה לא משפיעה על יכחות של דברים

הגדרות:
 מרחב הרברנד
 מבנה הרברנד
 בסיס הרברנד
 אמא של הרברנד

טענות על מבנה הרברנד:

1. פירוש של ש"ס הוא הש"ס
2. ה חיות של שס"ים שנכונים ב-p הם אלה ש- $p(s_1, \dots, s_n)$ נמצאים בבסיס הרברנד.
3. אם מגדירים השמה של תחשיב הפסוקים לפסוקים האטומיים (שנותנת ערכים לפי מה שייר למרחב הרברנד), אז היא נותנת T או F לכל נוסחא חסרת כמתים לפי סיפוק M של אותה הנוסחא.
4. הצבה של $\gamma[x]$ במקום x משאירה סיפוק על ידי M, γ אותו דבר $M, \gamma \leq M, \gamma$ מספק את phi אם M מספקת את phi כשאני מציב במשתנים החופשיים את הערכים ש- γ נותנת להם (ערכים אלה הם ש"סים).
5. לגבי פסוקים – אם לכל x אז כל ש"ס שאציב יהיה נכון. אם קיים x אז קיים ש"ס שאני אציב ויהיה נכון.

למה להקלת הוכחות ב- HFOL:

אם $\Gamma \vdash_{HPC} A$ (בתחשיב הפסוקים – שימו לב שכתוב רשום HPC) אז $\Gamma \vdash_{HFOL} A^*$ כאשר A^* ו- Γ^* הן נוסחא המתקבלות מ- A וגאמא ע"י החלפת הפסוקים בנוסחאות מתחשיב הפרדיקטים.

תרגילי הרחבת שפות בלי שזה משפיע.

PNF – הגעה על ידי שקילויות

** 13

הוכחת משפט השלמות

שימושים של משפט השלמות:

- קומפקטיות של FOL – ולכן הטבעיים זה באסה
- משפט סקולם לזוניהיים
- משפט הרברנד

משפט סקולם – אפשר להעביר לצורת PNF.

שימוש במשפט הרברנד לנביעה: העברת לאי ספיקות של קבוצה, את הקבוצה להעביר ל- PNF, לזה לעשות סקולם – ואז בתחשיב הפסוקים שזה לא ספיק כי יש תת קבוצה לא ספיקה של זה.

משפט הקומפקטיות של FOL.

משפט החלפת אקווילנטיים

הוא אומר: $A \leftrightarrow A' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ כאשר φ' מתקבל מ- φ על ידי החלפת המופעים של A ב- A' . ההוכחה היא כמובן באינדוקציה על מבנה φ .

לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון: הגדרת מבנה נורמלי ונביעה. משפטי שקילות.

14 **

הוכחת משפטי שקילות של לוגיקה עם שוויון
שפה רב סוגית.

מעבר לשפה חד סוגית:

- יצירת שפה מתאימה (הכל נשאר עם מחיקה של הסוגים + הוספת אינדיקטורים)
- תרגום (משתנים, סימני פוקנציה ויחסים כמו שהגיוני. לכל וקיים גרירה ווגם בהתאמה)
- יצירת תיאוריה (לקבוע – מה הסוג שלו, לסימן יחס – אם מקיים אז הם מהסוגים, לסימן פוקנציה – אם מהסוגים אז היא מהסוג שיוצא)

דדוקציה טבעית עם שוויון – שתי דרכים להרחבה

אוסף דוגמאות נגדיות:

t-ספיקות לא גורר v-ספיקות: $P(x) \wedge \neg P(y)$.

רדוקצית נביעה לספיקות לא עובדת ב-v-נביעה: $A = P(x,y) \wedge \exists x \neg P(x,x)$. (הרדוקציה עובדת רק ל-A פסוק).

משפט דדוקציה לא נכון ב-v-נביעה: $\not\vdash x=0 \rightarrow \forall x \forall y (x=y), x=0 \vdash \forall x \forall y (x=y)$. (הוא נכון רק אם A הוא פסוק)

t-ספיקות של קבוצה לא אומר t-ספיקות של הסגור שלה: $\Gamma = \{P(x), \forall y P(y)\}$.

אם פסוק ספיק הוא לאו דווקא ספיק במבנה הרברנד: $\exists x R(x) \wedge \neg R(c)$. (זה נכון לפסוק אוניברסלי)

אם פסוק נכון בכל מבנה הרברנד לא אומר שהוא תקף:
 $\varphi = (R(c) \wedge \forall x (R(x) \rightarrow R(f(x)))) \rightarrow \forall x R(x)$. (זה כן נכון עבור פסוקים יישי).

$$D = \{0,1\}$$

לא כל מבנה של Eq הוא מבנה נורמלי: $I[=] \simeq \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ (אם כי הוא מבנה "שקילות")

משפט להוניהיים סלוקם הוא הכי מצומצם: $\forall x \forall y (f(x)=f(y) \rightarrow x=y) \wedge \exists z \forall x (f(x) \neq z)$.