1. $\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge |\pi - R| < \epsilon))$
2. $\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge |\sqrt{2} - R| < \epsilon))$
3. $\forall x\forall y(Rational(x) \wedge Rational(y) \rightarrow Rational(x + y))$

צריך להוכיח: $\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge |(\pi + \sqrt{2}) - R| < \epsilon))$

$num.$		$Rule$	$Assumptions$
1	$\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|\pi - R\| < \epsilon))$	$Assumption$	1
2	$\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|\sqrt{2} - R\| < \epsilon))$	$Assumption$	2
3	$\forall x\forall y(Rational(x) \wedge Rational(y) \rightarrow Rational(x + y))$	$Assumption$	3
4	$\epsilon > 0$	$Assumption$	4
5	$\forall x(x > 0 \rightarrow x/2 > 0)$	$Arith.$	
6	$\epsilon > 0 \rightarrow \epsilon/2 > 0$	5, $(\forall E)$	
7	$\epsilon/2 > 0$	6,4, $(\rightarrow E)$	4
8	$\epsilon/2 > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|\pi - R\| < \epsilon/2)$	1, $(\forall E)$	1
9	$\exists R(Rational(R) \wedge \|\pi - R\| < \epsilon/2)$	7,8,$(\rightarrow E)$	1,4
10	$Rational(R_1) \wedge \|\pi - R_1\| < \epsilon/2$	$Assumption$	10
11	$\epsilon/2 > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|\sqrt{2} - R\| < \epsilon/2)$	2, $(\forall E)$	2
12	$\exists R(Rational(R) \wedge \|\sqrt{2} - R\| < \epsilon/2)$	7,11,$(\rightarrow E)$	2,4
13	$Rational(R_2) \wedge \|\sqrt{2} - R_2\| < \epsilon/2$	$Assumption$	13
14	$Rational(R_1)$	10, $(\wedge E)$	10
15	$Rational(R_2)$	13, $(\wedge E)$	13
16	$Rational(R_1) \wedge Rational(R_2)$	14,15, $(\wedge I)$	10,13
17	$\forall y(Rational(R_1) \wedge Rational(y) \rightarrow Rational(R_1 + y))$	3, $(\forall E)$	3
18	$Rational(R_1) \wedge Rational(R_2) \rightarrow Rational(R_1 + R_2)$	17, $(\forall E)$	3
19	$Rational(R_1 + R_2)$	16,18, $(\rightarrow E)$	3,10,13
20	$\|\pi - R_1\| < \epsilon/2$	10, $(\wedge E)$	10
21	$\|\sqrt{2} - R_2\| < \epsilon/2$	13, $(\wedge E)$	13
22	$\|\pi + \sqrt{2}\| - (R_1 + R_2) = \|(\pi - R_1) + (\sqrt{2} - R_2)\| \leq$ $\|\pi - R_1\| + \|\sqrt{2} - R_2\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$	$Arith$, 21,20, $\forall, \rightarrow, \wedge$ $rules$	10,13
23	$Rational(R_1 + R_2) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - (R_1 + R_2)\| < \epsilon$	19,22,$(\wedge I)$	3,10,13
24	$\exists R(Rational(R) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - R\| < \epsilon)$	23, $(\exists I)$	3,10,13
25	$\exists R(Rational(R) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - R\| < \epsilon)$	9,24, $(\exists E)$	1,3,4,13
26	$\exists R(Rational(R) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - R\| < \epsilon)$	12,25, $(\exists E)$	1,2,3,4
27	$(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - R\| < \epsilon))$	26, $(\rightarrow I)$	1,2,3
28	$\forall\epsilon(\epsilon > 0 \rightarrow \exists R(Rational(R) \wedge \|(\pi + \sqrt{2}) - R\| < \epsilon))$	27, $(\forall I)$	1,2,3

שימו לב: בהוכחה לא היה דרוש ידע על מה זה "מספר רציונלי". כל מה שנדרש לדעת הוא שאם נחבר שני מספרים רציונליים, נקבל מספר רציונלי. כמו כן היה דרוש ידע בסיסי על חיבור, $\leq$, וערך מוחלט (בעיקר "אי שוויון המשולש").