

לוגיקה למדמ"ח – שיעור 11

נמשיך מאיפה שהפסקנו. תזכורת:

למדנו 2 מערכות הוכחה מקבילות לאלו של תחשיב הפסוקים - מערכת נוסח הילבט עבור FOL (או תחשיב הפרקדיטים) ודדקוציה טבעית עבור FOL. ציינו שה-ND היא עבור $\exists$ -נביעה והילברט הוא עבור $\forall$ -נביעה (משתקף למשל בכלל ההכללה שנמצא בהילברט, והוא תקף ב- $\forall$ -נביעה)

אמרנו כי:

$$\begin{aligned} T \vdash_{FOL}^t \varphi &\Leftrightarrow T \vdash_{NFOL} \varphi \\ T \vdash_{FOL}^v \varphi &\Leftrightarrow T \vdash_{HFOL} \varphi \end{aligned}$$

לא הוכחנו את זה ואנחנו בספק אם נראה את ההוכחה המלאה של זה. אבל לאור זה שזה אמור להיות נכון - מה יקרה עם משפט הדדקוציה עבור HFOL? האם הוא אמור להיות נכון או לא?

אז נשים לב - משפט הדדקוציה המלא כמובן אינו נכון ל-HFOL (כי הוא אינו נכון עבור $\forall$ -נביעה), כלומר הוא לא נכון באופן כללי. כלומר לא תמיד מתקיים:

$$T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B \quad (\Rightarrow) \quad T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$$

כיוון אחד כמובן כן תמיד נכון.

הדוגמא הנגדית הטובה ביותר היא הדוגמא הבאה:

נוכיח כי: $p(x) \vdash_{HFOL} \forall x p(x)$. הוכחה: $p(x), \forall x p(x)$ (השתמשנו בכלל ההכללה).

אבל: $\not\vdash_{HFOL} p(x) \rightarrow \forall x p(x)$. איך אני יודע שזה לא ניתן להוכחה ב-HFOL? שאלה אחרת:

מאיפה אנחנו אמורים לדעת? אפשר להביא מודל נגדי. ובשביל זה צריך להתסמך על ההצהרות מתחילת השיעור, ספציפית על $T \vdash_{HFOL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{FOL}^v \varphi$ (זה הוא כיוון התקפות - הראינו איך לעשות את זה - עבור כל האקסיומות $\forall$ -תקפות, ולהראות שהתקפות נשמרת תחת כללי ההיסק, עשינו חלק ניכר מזה בשיעור שעבר).

לכן כדי להראות שמהשו לא ניתן להוכחה, מספיק לדעת שהמערכת היא *sounded* (ולא צריך את הכיוון ההפוך). הכיוון ההפוך, השלמות ($T \vdash_{FOL}^v \varphi \Rightarrow T \vdash_{HFOL} \varphi$) שאומר שאם משהו נובע לפי הסמנטיקה באופן לוגי אז יש לו הוכחה במערכת, זה הכיוון היותר קשה. (זו כבר לא הוכחה מכנית כמו קודם, נזכר בהוכחה עבור תחשיב הפסוקים כדי להמחיש את הקושי). אבל בשבילנו כעת מספיק

הכיוון הפשוט על ידי שניתן דוגמא נגדית. נראה אותה:

מבנה עם 2 עצמים: 0,1. וכעת: $0 \in I[p]$, $1 \notin I[p]$.
 ואם נכתוב את זה כמו שצריך במבחן: $M = \langle I, D \rangle$: $I[p] = \{0\}$, $D = \{0,1\}$.
 כעת, אם $v[x] = 0$ אז: $\mathcal{M}, v \models \rho(x) \rightarrow \forall x \rho(x)$.

אם ננסה לשחזר את ההוכחה של משפט הדדוקציה עבור מתחשיב הפסוקים, משהו פה צריך לא לעבוד.
 למה אותה הוכחה לא תעבוד? איפה תהיה הבעיה?
 בשביל זה צריך להזכר מה הייתה ההוכחה - נזכר:

אנחנו מניחים שיש הוכחה של B מ- $T \cup \{A\}$: הנה היא: $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$. כל φ_i הוא אקסיומה, או
 שייך ל- $T \cup \{A\}$ או נובע מקודמים על ידי כלל ההיסק. את זה הפכנו להוכחה מתוך T. ההוכחה שלנו
 הייתה באינדוקציה על אורך ההוכחה, והראינו כי $A \rightarrow \varphi_i$ יכוח מ- T לכל i (בפרט עבור $i=n$ נקבל את מה
 שאנחנו רוצים להוכיח). אם אתם לא זוכרים – קפצו לשם (שיעור 3 עמוד 7) שניה ותזכרו.

אם ננסה לעשות אותו דבר פה, למה זה לא יעבוד לנו כאן?
 ראינו מה הסיבה שהדברים מופיעים בהוכחה הנתונה (כלומר למה φ_i מופיע) - אם הוא היה ב- T אז
 סבבה (כלומר זה עובר להוכחה שלנו שצריכה להיות מ- T ולא מ- $T \cup \{A\}$), אם הוא A עצמו אז הוכחנו
 $A \rightarrow A$. האפשרות הבאה היא שהוא אחד האקסיומות - אבל שוב זה בסדר.
 האפשרות האחרונה היא שנוסחא הופיעה בעזרת כלל ההיסק, MP. מה שחסר עכשיו זה שנוסף לנו עוד
 כלל אחד - והוא כלל ההכללה. כעת ההוכחה צריכה לטפל באם אחת הנוסחאות הגיעה באמצעות כלל
 ההיסק החדש - שם זה לא יעבוד!

נרשום את זה בצורה רשמית:

משפט הדדוקציה של HFOL

אם A פסוק אז: $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B \iff T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$.

הוכחה:

$\Rightarrow$
 הוכחת כיוון זה היא כמו במקרה של HPC (גם שם זה היה טריוויאלי).

$\Leftarrow$
 נניח ש- $T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$. כמו במקרה של HPC נראה שאם $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$ היא סדרת הוכחת
 של B מ- $T \cup \{A\}$ אז לכל $1 < i < n$: $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow \varphi_i$. רוב ההוכחה - כמו ב- HPC. (במבחן כמובן
 לא עושים את זה - אלא חוזרים על ההוכחה). יש רק עוד מקרה אחד שלא היה בהוכחה של HPC והוא

ש- φ_i מוסק מ- φ_j (כאשר $j < i$) ע"י כלל ההכללה. זה אומר ש- $\varphi_i = \forall x \varphi_j$ לאיזה משתנה x .

מהנחת האינדוקציה עבור φ_j : $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow \varphi_j$. מזה מקבלים על ידי כלל ההכללה ש:

$T \vdash_{HFOL} \forall x (A \rightarrow \varphi_j)$ (שזה לא מה שאנחנו רוצים, אנחנו רוצים A גורר את ה"לכל"). האקסיומה (31) "במקרה" מסדרת לנו את זה. אך על האקסיומה הזו יש לנו תנאי...

אז נרצה להשתמש באקסיומה: $\vdash_{HFOL} \forall x (A \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (A \rightarrow \forall x \varphi_j)$. זה נראה כמו אקסיומה (והיא

באמת כזו), אבל בדף יש הגבלה ש- x לא חופשי ב- A . וזה מתאים לנו כאן בגלל ש- A הוא פסוק. זה המקום בו משתמשים בזה ש- A הוא פסוק וכאן זה המקום בו ההוכחה הרגילה אינה עובדת. משתי

העובדות האחרונות, נקבל בעזרת MP (שהוא עדיין כלל ב- HFOL): $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow \forall x \varphi_j$.

כלומר: $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow \varphi_i$.

נביעה לוגית ב- $\vdash_{HFOL}$ ו- $\vdash_{NDFOL}$

נסקור את הקשר בין נביעה לוגית ב- $\vdash_{HFOL}$ ו- $\vdash_{NDFOL}$.

נניח $T \vdash_{HFOL} \varphi$ אז יש קבוצה חלקית סופית של T - $\psi_1, \dots, \psi_k$, כך ש: $\psi_1, \dots, \psi_k \vdash_{HFOL} \varphi$.

אי אפשר לעשות משפט הדדוקציה כי לא בטוח שהפס'ים הם פסוקים. אבל ב- HFOL אין הבדל בין להוכיח נוסחה לבין להוכיח את הסגור האוניברסלי שלה. ולכן זה אם"ם: $\forall \psi_1, \dots, \forall \psi_k \vdash_{HFOL} \varphi$ (נזכר בסימון הזה - הוא אומר הסגור). אלה כבר פסוקים ונוכל לעשות משפט דדוקציה. ולכן (נפעיל את

המשפט k פעמים) זה אם"ם: $\vdash_{HFOL} \forall \psi_1 \rightarrow (\forall \psi_2 \rightarrow (\dots (\forall \psi_k \rightarrow A) \dots))$. לגבי יכוחות של

אמיתות לוגיות לא אמור להיות הבדל בין HFOL ו- NDFOL כי כל ההנחות הם פסוקים (למעשה קבוצה ההנחות היא הקבוצה הריקה). ולכן אנו מצפים לקבל (ובצדק, והצדק אף יהיה איתנו):

$$\vdash_{NDFOL} \forall \psi_1 \rightarrow (\forall \psi_2 \rightarrow (\dots (\forall \psi_k \rightarrow A) \dots))$$

עשינו כאן משהו חשוב - בהרבה מערכות הוכחה אוטומטית זה מה שעושים - דדוקציה לבעיה של נביעה מהנחות - לבעיה שלהראות שנוסחא היא אמת לוגית.

בצורה כללית:

$$\vdash_{NDFOL} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{HFOL} \varphi$$

כשמדובר על קשרים בין מערכות הוכחה, זה אמור להיות יותר קל להוכיח את זה ישר מאשר להוכיח משפטי שלמות (כלומר לעבור דרך סמנטיקה) ולקשר ביניהם. לכן נוכיח את זה בצורה ישירה.

הכיוון היותר קל הוא $\Rightarrow$. יש לנו סדרת הוכחה שכל דבר הוא אקסיומה או נובע מקודמים על ידי כלל ההיסק. נראה כי כל אקסיומה ניתן להוכחה ב-NDFOL (פשוט 10 תרגילים טכניים) ואז נראה שאם מפעילים את כללי ההיסק, זה נשמר ב-NDFOL. מודוס פוננס זה ישיר (כי זה כלל של NDFOL).

השאלה היא מה קורה כאשר יש לנו: $\dots, \psi_i, \dots, \forall x \psi_i, \dots$. כלומר צריך להראות שאם

יש לנו כלל הכנסה ב-NDFOL אך צריך להזהר כי יש תנאי ש-x לא $\vdash_{NDFOL} \forall x \psi_i$ אז $\vdash_{NDFOL} \psi_i$.

חופשי באף אחת מההנחות שעליהם ההוכחה עבור ψ_i התבססה. אבל אין פה הנחות ולכן נוכל להפעיל את כלל ההכללה.

כמובן, בכל הפסקה האחרונה, כשרשמנו $\vdash_{NDFOL} \psi_i$ התכוונו $\psi_i \Rightarrow \vdash_{NDFOL}$. אז הטענה שלנו הייתה שאם $\vdash_{NDFOL} \psi_i \Rightarrow \vdash_{NDFOL} \forall x \psi_i$ אז $\vdash_{NDFOL} \psi_i \Rightarrow \vdash_{NDFOL} \forall x \psi_i$.

הכיוון ההפוך קצת יותר קשה. נראה מה הסיבה שהוא יותר קשה - מה הבעיה שנוצרת?

אנחנו רוצים להוכיח:

$$\vdash_{NDFOL} \psi_i \Rightarrow \vdash_{HFOL} \psi_i$$

(נזהר בין סימן הסקונט והגרירה! פעם ראשונה שקורה לנו שהוא מופיע באותה שורה במשמעות שונה!)

נעשה באי' על מבנה \ אורך ההוכחה. הבעיה שהיא שבהוכחה בצורה של צד שמאל יכולים להופיע דברים שלא מהצורה הזו - יכולים להופיע דברים מצד שמאל של הסקונט (כלומר שזה לא יהיה הקבוצה הריקה מצד שמאל), וזה מפריע להוכחה באי'. הפתרון הוא לנסות להוכיח משהו יותר חזק ממה שהתכוונו. (מי שלא בטוח מה הבעיה, שינסה להוכיח ויראה איפה הוא נתקע).

הוכחה:

מוכיחים באינדוקציה שאם $\vdash_{NDFOL} \psi_1, \dots, \psi_k \Rightarrow \psi$ אז $\vdash_{HFOL} \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\dots (\psi_k \rightarrow \psi) \dots))$.
ועכשיו שוב זו הוכחה קלה (ארוכה - כי יש 10 כללים, אבל כל מקרה הוא פשוט). מכאן זה רק עבודה שחורה - מומלץ מאוד לבצע אותה.

מה הרווחנו?

בגלל השקילות הזו נוכל להתרכז ב-HFOL (שיהיה לנו יותר קל להוכיח עליה דברים מאשר על NDFOL).

משפט השלמות של HFOL

נחזור רגע למה שהצהרנו בתחילה השיעור, ונתחיל להוכיח את אחת מ-4 הגרירות (2 שקילויות = 4 גרירות).

נוכיח את משפט השלמות עבור HFOL:

$$T \vdash_{HFOL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{FOL}^v \varphi$$

אפשר להניח ש- T מורכבת מפסוקים (נוסיף סגורים במקרה הצורך) ואז אפשר לכתוב:

$$T \vdash_{HFOL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{FOL} \varphi$$

אנחנו לא ניתן את ההוכחה עד הסוף, אך יש דברים שקשורים בהוכחה שחשובים לנו.

איך בכלל ניגשים למשפט כזה? מה אפשר לעשות? להציץ עבור המקרים הפשוטים יותר - מה עשינו בתחשיב הפסוקים. אם נבדוק מה עשינו שם, אנחנו הלכנו בכיוון ההפוך. הנחנו את שלילת הנגרר והראינו את שלילת הגורר על ידי בניית מודל נגדי. איך עשינו את זה? הרחבנו את התורה כך שהיא נתנה לנו השמה שנתנה t לאיברי התורה ו- f למי שלא שייך לה.

הגדרה: T תורה שלמה פירושו שלכל φ , או ש- $T \vdash \varphi$ או ש- $T \vdash \neg \varphi$ (לא משנה לנו כעת איזה נביעה).

נשים לב שזו היא תכונה של התורה, ולא של התחשיב או מערכת ההוכחה. למשל בהילברט, יש לנו תורות שלמות ויש כאלה שלא (למשל התורה $T = \{P_1\}$ אי אפשר להוכיח ממנו את P_2 אך גם לא את $\neg P_2$) אך השלמות הזו לא קשורה להילברט.

צריך להזהר (כפילות בשימוש במושג שלמות):

- תורה שלמה זה מה שהגדרנו עכשיו.
- משפט השלמות, לא קשור לזה בכלל. זה אומר מערכת הוכחה פורמלית שלמה ביחס לאיזה שהיא סמנטיקה (ולא תורה!). כאן יש שלם עבור משהו. זה שלמות של תחשיב ואין לזה קשר גם למשל לשלילה (שזה בכלל קשר בשפה).
- יש גם יחס סדר שלם שצריך להזהר איתו.
- כל סדרת קושי מתכנסת זה גם מראה על שלמות (שוב במובן אחר שלא קשור לאחרים).

אז מה שעשינו בהוכחה בתחשיב הפסוקים הייתה לנו תורה קונסיסטנטית והפכנו אותה לתורה שלמה וקונסיסטנטית.

גם פה נעשה את זה בכיוון ההפוך:
נבנה מודל נגדי. אבל ברור שכל זה לא יכול להספיק. למה? כי כשבונים מודל צריך להגיד מי איברי המודל - מי הם העצמים? מאיפה נקח את האיברים של אותו מבנה בו כל איברי T נכונים ו- φ לא? הטבעי ביותר זה להשתמש בעצמים הסינטקטיים שיש לנו פה.

זה מביא אותנו לכמה מושגים בסיסיים. העצמים שבאופן טבעי השפה מספקת זה ש"ע של השפה. נרצה להתרכז יותר באלה שהמובן שלהם לא תלוי בהשמות - אז נתרכז בש"ע הסגורים (ללא משתנים). אבל יש שפות בלי ש"ע סגורים - כשאין קבועים. אז נניח מעכשיו שיש לשפה שלנו לפחות קבוע אחד. מה אם אין? אז נוסיף אחד ואז נראה שהעשרת השפה לא השפיעה על יכחות.

זה לא טריוויאלי שאם משהו לא היה יכח, ואז העשרתי את השפה - הוא עדיין לא יכח. למה זה לא טריוויאלי?
כשהוספנו קבועים חדשים, הוספנו אינסוף אקסיומות (נזכר - בדף אנחנו רואים רק סכימות. למשל: $\forall x A \rightarrow A\{x\}$ זו סכימה שתלוייה בשפה שעליה אנחנו מדברים, כי t הוא ש"ע של השפה). העשרת שפה = עוד אקסיומות, ולכן יכולות להיות לנו בעיות.

תרגיל

נניח $T \cup \{\varphi\}$ קבוצת נוסחאות בשפה L ונניח $T \vdash_{H_{\text{סל}}} \varphi$ ב- L . נניח L' מתקבלת מ- L ע"י הוספת קבוצה של קבועים חדשים. רוצים להוכיח ש:
 $T \vdash_{H_{\text{סל}}} \varphi$ גם ב- L' .

מרגע זה ואילך אנחנו נכנסים למסה של הגדרות חדשות שיאפשרו לנו לבצע את ההוכחה.

הגדרה

מרחב הרברנד של שפה L (עם קבוע, לפחות אחד) הוא קבוצת שמות העצם הסגורים (כלומר שאין בהם משתנים של L). נסמן ב- $H(L)$.

דוגמא א

שפה, נסמן ב- L_0 שיש בה:
 - קבוע - 0.
 - S - סימן פונ' חד מקומי
 - $=$ - סימן יחס דו מקומי
 - $>$ - סימן יחס דו מקומי

(ι)
 $(\iota \rightarrow \iota)$
 $(\iota^2 \rightarrow o)$
 $(\iota^2 \rightarrow o)$

אז כאן:

$$H(L) = \{0, s(0), s(s(0)), \dots\}$$

אפשר לזהות את מרחב ההרברנט כאן עם הטבעיים.

דוגמא ב

שפה שנסמן אותה ב- L_{PA} שהיא השפה L_0 בתוספת שני סימני פונ' דו מקומיים: $+$, $*$ (הפירוש הטבעי הוא שהקבוע העגול ההוא זה $S, 0$ זה העוקב, שווה, גדול מ-, חיבור וכפל כרגיל. זה נקרא המבנה הסטנדרטי של השפה הזו). אנחנו נראה דווקא מבנה לא סטנדרטי של השפה הזו. כעת לדוגמא:

$$+(s(0), s(s(0))) \in H(L_{PA})$$

(אנחנו נכתוב גם + ביניהם)

חשוב מאוד להבדיל בין $S(S(0))+S(0)$ לבין $S(S(S(0)))$. שניהם שמות עצם שונים! הם יכולים להיות שווים במובן שמתייחסים אחד לשני ב- $=$, אבל לסימן $=$ אין יחס מיוחד (לפחות לא כעת, אולי בעתיד נראה דברים אחרים). אולי הפירוש שלהם אותו דבר, אבל הם 2 ש"ע סגורים שונים זה מזה – אז הם שני איברים שונים של מרחב הרבנד.

קיצור: ש"ס - שם עצם סגור.

הגדרה

מבנה הרבנד עבור שפה L זה מבנה מהצורה $\langle D, I \rangle$ שבו:

1. $D = H(L)$ (נזכור שתמיד עכשיו L היא עם קבוע ולכן $H(L)$ לא ריק)

נשים לב מה אנחנו עושים פה – כל ש"ס בשפה יהפוך לאיבר בתחום.

2. אם c קבוע של השפה אז $I[c] = c$

3. אם f סימן פונ' n -מקומי של השפה אז $I[f] = \lambda_{x_1 \in D, \dots, x_n \in D}. f(x_1, \dots, x_n) = f^I$

כלומר אם $t_1, \dots, t_n$ הם ש"סים של L (כלומר איברים של $H(L)$) אז:

$f^I[t_1, \dots, t_n] = f(t_1, \dots, t_n)$. כאן ל- t_i הם ש"ע של המבנה וגם כל צד ימין הוא ש"ע של המבנה.

טענה 1

מהגדרה זו נובע ממש בקלות (באינדוקציה על מבנה t) שאם t ש"ס (נפסיק לכתוב ש"ס של L , אנחנו מעכשיו עובדים עם אותה L) אז: $I[t] = t$. (בשמאל t הם ש"ע של השפה, בשמאל הוא איבר של המבנה - יש לו במשוואה הזו 2 תפקידים שונים).

דוגמא: נניח t ש"ע שאינו סגור של L_{PA} . למשל: $t = v_0 + s(0)$ ונרצה לשאול מה הפירוש של t במבנה הרבנד. זו שאלה חסרת משמעות כי היא מכילה משתנה. נוכל לשאול את זה עם יש השמה. אז נניח $v[v_0] = S(S(0))$. כעת: $v[t] = S(S(0)) + S(c)$. וזה הוא זה! זה הפירוש! אין עוד פיתוח.

אז יש לנו מרחב הרבנד שאנחנו יודעים מה האיברים שלו ומה הפירושים של הדברים. מאחורי ההגדרה הזו מתבססות 2 הנחות שעומדות מאחורי DB:

- DCA - הנחת התחום הסגור. אומרת שמה שיש בעולם זה רק מה שיש לו שם בשפה. המערכת טוענת לקיום רק מי שיש לו שם. (במערכת האוני' - סטודנט בלי מספר זיהוי למשל במערכת שלה, לא קיים)

- UNA - הנחת השם היחיד. ארנון אברון וארנון עברון הם שני אנשים שונים! אפילו אם יש שגיאת הקלדה (בהנחה שהשם זה מה שמזהה את האיש ולא מספר זהות למשל).

בפירוש הרגיל של הטבעיים ל- $2+3$ ול- 5 אותו פירוש, ולכן הוא לא מבנה הרבנד עבור L_{PA} .

נדגיש - מבנה הרברד הוא סוג מאוד מיוחד של מבנים. לא כל מבנה עבור שפה הוא מבנה הרברד, בדרך כלל (בחיים המתמטיים הרגילים) הם לא. בשפה המצומצמת (כלומר L_0 , רק עם 0 ו-1) אז הטבעיים כן היו. כשהוספנו $^*, +$ הם כבר לא היו מבנה הרברד.

במנה הרברנד הפירוש של ש"ס זה הוא עצמו ורק הוא! כלומר 2 ש"ס שונים 2 פירושים שונים. עבור אותה שפה, במה 2 מבני הרברנד יכולים להיות שונים זה מזה? בפירוש לסימני היחס. זה ההבדל בין מבני הרברנד שונים עבור אותה השפה. (נזכור – לשפה מסדר ראשון יש לפחות סימן יחס אחד, אחרת לא יכולות להיות נוסחאות)

הגדרה

בסיס הרברנד של מבנה הרברנד M עבור השפה L הוא קבוצת כל הפסוקים האטומיים הנכונים (והתקפים). זה לא משנה - זה פסוקים) ב- M . סימון: $HB(M)$.

תזכורת: לכל פסוק אטומי של L יש הצורה $p(s_1, \dots, s_n)$ כאשר p סימן יחס n -מקומי של L ו- $s_1, \dots, s_n$ הם ש"סים.

טענה 2

אם $M = \langle H(L), I \rangle$ מבנה הרברנד עבור L ו- p סימן יחס n -מקומי של L , אז

$$I[p] = \{ \langle s_1, \dots, s_n \rangle \in H(L) \mid p(s_1, \dots, s_n) \in HB(L) \}$$

רוב ההוכחות מעכשיו הן מאוד טריוויאליות, רק צריך להתרגל למושגים החדשים ולראות איך הם משתלבים במושגים הקיימים.

הוכחה:

נסמן את צד ימין של המשוואה ב- F . אנחנו רוצים להראות ש- $I[p] = F$ (שוויון קבוצות). אז לכל n -יה $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ של ש"סים:

$$\langle s_1, \dots, s_n \rangle \in F \Leftrightarrow p(s_1, \dots, s_n) \in HB(L)$$

$$\Leftrightarrow M \models p(s_1, \dots, s_n)$$

$$(*) \Leftrightarrow \langle I[s_1], \dots, I[s_n] \rangle \in I[p]$$

כיוון שמדובר ב- n מקומות

$$\Rightarrow \langle s_1, \dots, s_n \rangle \in I[p]$$

היגיוני, ואם $s_1, \dots, s_n$

ולכן: $I[p] = F$.

(*) [זו שליד אחת השקילויות] - האם זה נכון לכל מבנה או רק למבנה הרברנד? זה נכון כמובן לכל מבנה, זו ההגדרה. לכן עד לשקילות הזו, הדבר נכון לכל מבנה. במעבר הבא אנחנו משתמשים בזה

שאנחנו מדברים על מבנה הרברנד.

נשים לב שמבנה הרברנד זה שילוב של 2 דברים: מרחב ובסיס.

מה קורה עם צירופים בוליאנים של נוסחאות? (הקשרים של "וגם" וכו'. אבל מבלי ש"לכל" ו"קיים" נכנסים לתמונה). אז ערך האמת של צירופים בוליאנים הולכים לפי טבלאות האמת. ננסח את זה פורמלית:

טענה 3

נניח M מבנה הרברנד עבור L . נתייחס לפסוקים האטומיים של L כאל הפסוקים האטומיים של שפת תחשיב הפסוקים. נגדיר השמה v_M באופן במובן של תחשיב הפסוקים באופן הבא: רגע! מה זה השמה במובן של תחשיב הפסוקים? היא נותנת t/f לפסוקים האטומיים (ואז הרחבנו לנוסחאות). ב- FOL השמה נותנת לכל משתנה משהו מהתחום.

$$v_M[p(s_1, \dots, s_n)] = \begin{cases} t & M \models p(s_1, \dots, s_n) \\ f & M \not\models p(s_1, \dots, s_n) \end{cases} \rightarrow \text{(שקול לשייכות לבסיס הרברנד)}$$

נניח φ צירוף בוליאני של פסוקים אטומיים של L (כלומר φ פסוק של L שאין בו כמתים).

$$M \models \varphi \iff v_M[\varphi] = t \quad \text{אז: (זו למעשה הטענה)}$$

איך תהיה הוכחת הטענה?
אינדוקציה על מבנה הפסוק φ .
ההוכחה טריוויאלית.

עכשיו נתחיל להכניס לתמונה את ה"לכל" וה"קיים". נרצה לאפיין מתי פסוקים על "לכל" ו"קיים" נכונים במבנה הרברנד מבלי להכנס להשמה.

טענה 4

נניח v השמה במבנה הרברנד M (הוא כמובן עבור איזו שהיא שפה) ו- x משתנה. אז

$$M, v \models \varphi \iff M, v \models \varphi \left\{ \frac{v[x]}{x} \right\}$$

מה זה אומר ומה הרווח מזה?

האם ל- $\varphi \{ \frac{v[x]}{x} \}$ יש בכלל מובן? עד עכשיו השתמשנו בסימון ההצבה בצורה הזו: $\varphi \{ \frac{t}{x} \}$, כאשר:

φ - נוסחא, t - ש"ע של השפה, x - משתנה של השפה.
 במבנה רגיל מה שכתוב למעלה זה קשקוש - $v[x]$ זה איבר מהתחום ואי אפשר להציב אותו בתוך נוסחא. פה כן אפשר לעשות את זה כי $v[x]$ הוא אכן ש"ע של המבנה ולכן יש לזה מובן.
 בלי להגיד מבנה הרבנד, לא רק שזה לא נכון - זה הוא דבר חסר מובן.

"לכתוב דבר לא נכון מעיד על טעות"

לכתוב דבר חסר מובן מעיד על חוסר הבנה."

- ארנון אברון, 2009.

לסיכום: הביטוי $\varphi \{ \frac{v[x]}{x} \}$ הוא בעל מובן כיוון ש- $v[x]$ הוא כאן ש"ע של השפה.

מתוך הנחה ש- x הוא משתנה חופשי של φ , איזה יתרון יש לזה על פני φ ? שיש לו פחות משתנים חופשיים (פחות ב- 1, נפטרנו מ- x). אם נחזור על התהליך נוכל להעלים את כל המשתנים החופשיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 M, v \models \varphi \{ \frac{v[x]}{x} \} &\Leftrightarrow M, v \{ x = v[v[x]] \} \models \varphi \\
 &\swarrow \text{שלב ההצבה} \\
 &\swarrow \text{לפי הגדרה 1} \\
 &\Leftrightarrow M, v \{ x = v[x] \} \models \varphi \\
 &\swarrow \text{כי } v = v \{ x = v[x] \} \\
 &\Leftrightarrow M, v \models \varphi
 \end{aligned}$$

...כאן מסיימים

מסקנה מדיית:

נניח $F_v(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ונניח $v[x_i] = t_i$ (ש"סים) אז

$$M, v \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi \{ \frac{t_1}{x_1}, \dots, \frac{t_n}{x_n} \}$$

טענה 5 (לטיפול בכמתים)

$$\begin{array}{l} \text{א. אם } \forall x \varphi \text{ הוא פסוק אז } \models \varphi \{t/x\} \Leftrightarrow \models \forall x \varphi \text{ לכל ש"ס } t. \\ \text{ב. אם } \exists x \varphi \text{ הוא פסוק אז יש ש"ס } t \text{ כך ש: } \models \varphi \{t/x\} \Leftrightarrow \models \exists x \varphi. \end{array}$$

ההוכחה פה היא גם מאוד פשוטה. נוכיח את ב:

$\models \exists x \varphi$ אם יש השמה v כך ש: $\models \varphi$ M, v (בגלל ש- $\exists x \varphi$ הוא פסוק עפ"י הנחות הטענה). זה קורה לפי טענה 4 אם יש v כך ש: $\models \varphi \{v[x]/x\}$ M, v . מה זה הדבר האחרון? פסוק. (כי x הוא המשתנה החופשי היחיד, אם בכלל, בפי). כיוון שהוא פסוק אז זה שקול לכך שקיימת השמה v כך ש: $\models \varphi \{v[x]/x\}$. וזה שקול ל: קיים ש"ס t כך ש: $\models \varphi \{t/x\}$ M כיוון שלכל v , מתקיים $v[x]$ הם ש"ס ולהיפך (כל ש"ס t הוא $v[x]$ עבור השמה כלשהיא v).

נסיים כאן ונמשיך בשיעור הבא (וואלה..)