

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 4

התרגול נפתור 2 תרגילים. הראשון יהיה משעמם והוא ידגיש את רעיון האינדוקציה בהוכחות (יותר מדויק – על מה עושים בדיוק אינדוקציה). השני יהיה מעניין ומורכב יותר והשיעורי בית הקרובים יתבססו עליו.

תרגיל 1

תחילה נזכיר - אנחנו עדיין ב"עולם" של שבוע שעבר. אין סמנטיקה, רק סינטקס. נגדיר תחשיב חדש F . מה עלינו להגדיר?

- נוסחאות חוקיות

- אקסיומות

- כללי היסק

$$\{x, y, \rightarrow, \neg, (,)\}$$

אז אצלנו הנוסחאות החוקיות יהיו המחרוזות מעל הקבוצה הבאה:

$$x, y$$

האסיומות:

$$(N) \frac{A}{(\neg A)} \quad (I) \frac{A \quad B}{A \rightarrow B}$$

כללי היסק:

נשים לב ש- $\neg$ NOT כאן הוא לאו דווקא ה- $\neg$ מהעולם הסמנטי (ולכן אין סיבה להיות מוטרדים מכלל ההיסק הראשון).

תרגיל: הוכח כי אוסף המשפטים של F הינו בדיוק אוסף הנוסחאות החוקיות של HPC מעל:

$$\{x, y, \rightarrow, \neg, (,)\}$$

(נקרא לאוסף הנוסחאות הללו HPC^*)

נשים לב למשפטים בהמשך שמודגשים בקו תחתון שהם מבהירים בדיוק על מה צריך לעשות אינדוקציה.

עלינו להראות שני כיוונים:

$\leq$:

נניח ש- $\vdash_F A$ (כלומר A משפט ב- F). נרצה להוכיח שהוא נוסחא חוקית של HPC^* .

מה אנחנו יודעים על A ? שהוא משפט. כלומר שהוא יכיח. ולכן האינדוקציה צריכה להיעשות על אורך ההוכחה.

יש לנו אינדוקציה מבנית, אותה אנו עושים על נוסאות (על המבנה שלהן ליתר דיוק). אבל אם אנחנו יודעים שמשהו הוא יכיח, יותר הגיוני לעשות זאת את האינדוקציה על אורך ההוכחה.

בסיס:

$n=1$: אין לנו הנחות (A יכיח מהקבוצה הריקה), אז האופציה היחידה היא ש- A היא אקסיומה של F . כלומר או ש- $A=x$ או ש- $A=y$, ואלו נוסחאות חוקיות של HPC^* .

הנחת האינדוקציה:
עבור $n < k$, אם $A_1, \dots, A_k$ זו הוכחה של A_k ב- F , אז A_k נוסחא חוקית של HPC^* .

מעבר:

עבור סדרת ההוכחה $A_1, \dots, A_n$ של A ב- F , קיימות 3 אפשרויות:

1. A_n אקסיומה - כמו קודם.
2. A_n מתקבל מקודם ע"י הכלל (N). זה אומר שקיים $n < j$ כך ש: $A_n = (\neg A_j)$ [זה NOT] לפי הנחת האינדוקציה A_j היא נוסחא חוקית של HPC^* ולכן גם A_n .
3. A_n מתקבל מקודמים על ידי כלל ההיסק (I). כלומר קיימים $n < j, i$ כך ש- $A_n = A_i \rightarrow A_j$. לפי הנחת האינדוקציה A_i וגם A_j הן נוסחאות חוקיות של HPC^* ולכן גם A_n .

עד כאן הכיוון הראשון. נוכיח כעת את הכיוון ההפוך:

$\Rightarrow$:

נניח A נוסחה חוקית של HPC^* . נראה כי A הוא משפט של F (כלומר $\vdash_F A$)

עכשיו אנו יודעים ש- A הוא נוסחה חוקית, ולכן נוכל כעת לעשות אינדוקציה על מבנה הנוסחה:

בסיס:

A פסוק אטומי, לכן $A = x$ או $A = y$ ולהן קיימת הוכחה באורך 1 ב- F כי הן אקסיומות של F . (ההוכחה היא פשוט הם)

הנחת האינדוקציה:

אם B, C הן נוסחאות חוקיות של HPC^* אז הם משפטים של F (כלומר: $\vdash_F B$ $\vdash_F C$)

מעבר:

הפעם יש לנו 2 מקרים (במקום 3. כי בניגוד לאינדוקציה מבנית כמו שעשינו בדרך כלל, כאן יש לנו רק 2 קשרים).

1. $A = (\neg B)$ לפי הנחת האינדוקציה B הוא משפט של F (כלומר $\vdash_F B$) ולכן יש לו הוכחה $B_1, \dots, B$ ב- F .
לכן $B_1, \dots, B, (\neg B)$ היא הוכחה של A ב- F המתקבלת ע"י כלל ההיסק (N).
2. $A = (B \rightarrow C)$ ל.ה.א $\vdash_F B$ $\vdash_F C$ ולכן יש סדרות הוכחה $B_1, \dots, B$ $C_1, \dots, C$ ולכן $B_1, \dots, B, C, \dots, C_1, B \rightarrow C$ היא סדרת הוכחה של A ב- F המתקבלת על ידי (I).

מספר הגדרות

תורה T נקראת קונסיסטנטית ב- HPC אם "ם:

$$T \vdash_{HPC} A \quad \text{ו} \quad T \vdash_{HPC} A$$

$$T \vdash_{HPC} B$$

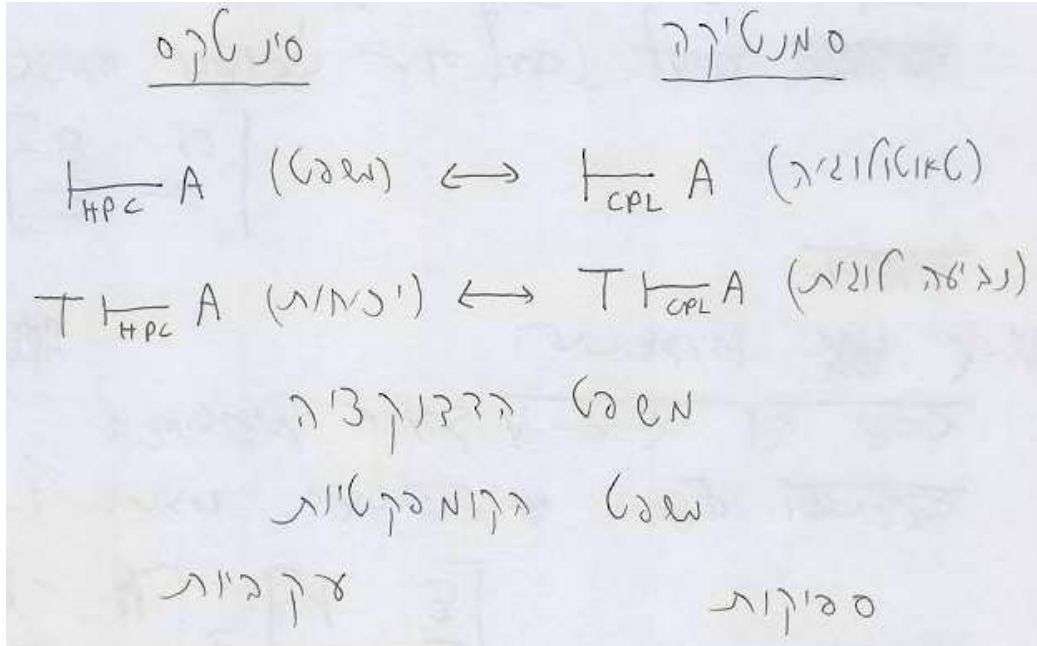
1. אין פסוק A כך ש:

2. קיים פסוק B כך ש:

(שתי ההגדרות שקולות, הראנו זאת בשיעור ולא נראה זאת שוב כאן)

מה זה אומר קונסיסטנטיות אינטואיטיבית? זה אומר שהתורה אומרת משהו. כי אם היא לא קונסיסטנטית לפי 2 הכל יכח בה, ואז מה היא בעצם אומרת?

נעזוב לרגע את העולם הסינטקטי, ונזכר בקשר (שלמעשה אנו מכירים):



בסמנטיקה, אי-ספיקות, כמו אי-קונסיסטנטיות, לא אומרת לנו כלום. כי אם לתורה אין מודל אז מה היא אומרת? וגם כל דבר נובע ממנה...

תרגיל 2 (התרגיל של השיעור)

משפט הקומפקטיות: (יש לו הרבה גירסאות, נכתוב את הגרסה שתעניין אותנו עכשיו)

$$\text{אם } T \text{ ספיקה } \Rightarrow \text{אם } T' \subseteq T \text{ ספיקה}$$

צביעה חוקית של גרף $G=(V,E)$ ב- k צבעים היא פונ' $f:V \rightarrow \{1,...,k\}$ כך ש- $f(a) \neq f(b)$ אם יש ב- E קשת בין a ל- b .

תרגיל (שהוא ממבחן!):

הוכח כי אם כל תת גרף סופי של G ניתן לצביעה חוקית ב- k צבעים גם G ניתן לצביעה חוקית ב- k צבעים.

אז מיד חושבים על משפט הקומפקטיות. הבעיה היא שפה מדובר על גרפים והמשפט מדבר על תורות... אנו צריכים לחשוב על "תרגום" בין גרף לתורה...

פתרון - הוכחה:
נגדיר קבוצה של פסוקים אטומיים P :

$$P = \{ p_u^i \mid u \in V, i \in \{1, \dots, k\} \}$$

לכל צומת בגרף אנו נותנים k פסוקים.
המוטיבציה: הפסוק p_u^i יקבל t אם"ם הצביעה צובעת את u בצבע i .

נבנה תורה T :

$$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

כך ש:

$$T_1 = \{ (p_u^1 \vee \dots \vee p_u^k) \mid u \in V \}$$

$$T_2 = \{ \neg(p_u^i \wedge p_u^j) \mid \begin{matrix} u \in V \\ i, j \in \{1, \dots, k\} \\ i \neq j \end{matrix} \}$$

$$T_3 = \{ \neg(p_u^i \wedge p_w^j) \mid \begin{matrix} (u, w) \in E \\ i \in \{1, \dots, k\} \end{matrix} \}$$

שתייצג צביעה חוקית של G .

הדרישות שלנו:

1. כל צומת צבוע בלפחות צבע אחד: T_1 .
2. כל צומת צבוע בכלל היותר צבע אחד: T_2 .
3. אם יש קשת בין a ל- b אז הם צבועים בצבעים שונים: T_3 .

כעת, טענה:

כל $T' \subseteq T$ סופית, היא ספיקה (אנו טוענים זאת כדי להגיע למה שנתון לנו מהתרגיל:
"כל תת גרף סופי של G ניתן לצביעה חוקית ב- k צבעים")

הוכחת הטענה:

תהי $T' \subseteq T$ סופית. נגדיר:

$$G' = (V', E')$$

כך ש:

$$V' = \{ u \in V \mid \begin{matrix} \text{מ/כ} \\ \text{כ/מ} \end{matrix} \text{ } u \text{ מופיע ב- } T' \} \quad E' = E \cap (V' \times V')$$

כעת הגרף G' הוא תת גרף סופי של G . לכן, לפי הנחת השאלה יש לו צביעה חוקית f .

נגדיר השמה v באופן הבא:

$$v(p_u^i) = t \iff f(u) = i$$

כעת, אחרי שהגדנו את ההשמה, נראה כי v מהווה מודל ל- T' (אנחנו רוצים להראות ש- T' ספיקה, זה כל העניין [כי T' היא תת-תורה סופית כלשהיא ולכן אם נראה כי היא ספיקה כל תת-תורה של T ספיקה])

יהי $A \in T'$. יש לנו 3 אפשרויות:

$$\begin{aligned} 1. \quad & u \in V \quad \text{אז} \quad A = p_u^1 \vee \dots \vee p_u^k \\ & \text{מהצורת } V', \quad u \in V' \iff \exists i \leq k \text{ כן } : \\ & \quad v(A) = t \quad \text{כי} \quad v(p_u^i) = t \iff f(u) = i \\ 2. \quad & \dots \quad A = \neg(p_u^i \wedge p_u^j) \dots \\ 3. \quad & \dots \end{aligned}$$

(יש להשלים)

אז הוכחנו שכל תת תורה סופית של T היא ספיקה, אז לפי משפט הקומפקטיות אנחנו יודעים ש- T ספיקה (זה עדיין לא מה שרצינו להוכיח, כי אנו צריכים להוכיח שהגרף צביע) ולכן יש השמה $\bar{v}$ (גג v) המהווה מודל ל- T נגדיר את הפונ' g באופן הבא:

$$g(u) = i \iff \bar{v}(p_u^i) = t \quad : u \in V \quad \text{אז}$$

מה נותר להראות?

ש- g היא צביעה חוקית של G . וזה בדיוק הכיוון ההפוך. אנו צריכים להראות שכל צומת נצבע בצבע יחיד, וכל שני צמתים מחוברים נצבעים בצבע שונה.

באתר תפורסם ההוכחה המלאה.

לאתר גם יועלה עוד תרגיל בנושא של משפט הקומפקטיות.

את התרגיל הבא יש להגיש לאחר פסח. שווה מאוד לעשות אותו!