30.4.09

לוגיקה למדמ"ח - תרגול 6

משפט הצבת אקוויולנטים

אם $T \vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$ אז לכל נוסחא φ ולכל P (פסוק אטומי) מתקיים: $T \vdash_{CPL} \varphi\{A/P\} \equiv \varphi\{B/P\}$.

שקילויות חשובות

1. שלילות:

$\neg\neg A \equiv A$ (שלילה כפולה)

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (דה מורגן)

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

למה השקילויות האלו של שלילה טובות? כי הן לוקחות את השלילה על נוסאחות מורכבות ומעבירות אותם "פנימה". אם נפעיל אותן הרבה פעמים נוכל להגיע לצורה של nnf.

2.

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$

$A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$

ייחוד הקבוצה: כל הקשרים הדו-מקומיים אפשר להחליף בדברים שמכילים רק שלילה וגרירה. בהרבה מקומות (בהרבה ספרים) CPL הוא רק מעל שני אלה ואלה השקילויות שמאפשרות לנו את זה.

3.

$A \wedge A \equiv A \vee A \equiv A$

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (אסוציאטיביות)

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

$A \wedge B \equiv B \wedge A$ (קומוטיביות)

$A \vee B \equiv B \vee A$

.4

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (דיסטריביוטיביות)

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (בליעה)

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$

למה זו הקבוצה שהכי חשובה לנו? היא עוזרת לנו להעביר נוסחאות לצורת CNF ו- DNF.

.5

$(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$

$\neg A \to \neg B \equiv B \to A$

$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$

$A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$

מה היא עושה? היא אחראית לעשות רדוקציה של גרירות. (זה מאפשר לנו להוריד כמות של קשר הגרירה. אם נרצה להעלים אותו נשתמש בקבוצה הזו)

.6

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

הגדרות

ליטרל: פסוק אטומי או שלילתו.

CNF - נוסחא בצורה זו היא נוסחה מהצורה: $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ כאשר כל Ci הוא נוסחא מהצורה $B_1 \vee \cdots \vee B_m$ כאשר לכל Bi הוא ליטרל.

DNF - נוסחא בצורה זו היא נוסחה מהצורה: $C_1 \vee C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ כאשר כל Ci הוא נוסחא מהצורה $B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$ כאשר לכל Bi הוא ליטרל.

<u>חידון צורות של נוסחאות!</u>

באיזה צורה הנוסחא הבאה?

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p)$$

!DNF

וזו?

$$(p \vee \neg q) \wedge r$$

!CNF

ומה עם זה?

$$p \wedge q$$

גם וגם!

וזה?

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg r)$$

לא זה ולא זה. (מה זה החידון הרמאי הזה?!)

בעתיד נראה למה בעצם ההגדרות האלו מועילות לנו.
אנו נראה שכל נוסחא ניתן למצוא נוסחאות בצורה CNF ו- DNF ששקולות לה. היום נראה איך עושים את זה.

תרגיל

מצא נוסחא בצורת CNF ונוסחא בצורת DNF השקולות ל- $p \to (\neg(q \vee \neg r))$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
& p \to (\neg(q \vee \neg r)) \equiv \\
& p \to (\neg(q \vee \neg r)) \equiv \\
& \neg p \vee (\neg(q \vee \neg r)) \equiv \\
& \neg p \vee (\neg q \wedge \neg\neg r) \equiv \\
& \neg p \vee (\neg q \wedge r) \equiv \\
& (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)
\end{aligned}
$$

אז אפשר להשתמש בשקילויות על מנת לעשות את זה. אבל לא תמיד זה קל. מה עושים כשזה לא קל?

הגדרה

לכל נוסחא A עם משתנים $\vec{p} = \langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ ישנה פונק ' $g_A^{\vec{p}} : \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ המוגדרת ע"י $g_A^{\vec{p}}(x_1, \ldots, x_n) = V(A)$ כאשר v השמה הנותנת למשתנים $p_1, \ldots, p_n$ את הערכים $x_1, \ldots, x_n$ בהתאמה.

משפט

לכל פונ' $F : \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ יש נוסחא *פי* בצורת CNF ונוסחא *פסי* בצורה DNF כך ש:

$$g_{\varphi}^{\vec{p}} = g_{\psi}^{\vec{p}} = F$$

(כלומר פונ' האמת של *פי* שווה לפונ' האמת של *פסי* ששווה ל- F).

לא נוכיח אותו אלא נגדים את האלג' שעושה את זה. ראינו שאפשר לעשות את זה עם שקילויות אבל זה לא אלג' (לדוגמא אך אחד לא הבטיח שזה יפסיק מתי שהוא).

אנו נדגים את האלג':

נגדיר קשר חדש, תלת מקומי, בשם if_then_else:

אם $v(p)=t$ אז $v(\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r)=v(q)$
אם $v(p)=f$ אז $v(\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r)=v(r)$

טבלת האמת שלו:

p	q	r	$If\ p\ then\ q\ else\ r$
t	t	t	t
t	t	f	t
t	f	t	f
t	f	f	f
f	t	t	t
f	t	f	f
f	f	t	t
f	f	f	f

כעת נרצה למצוא נוסחא בצורת CNF ואחת בצורת DNF ששקולות לו.
אין לנו כאן אפשרות לעבוד על שקילויות, אך אנו יכולים לעבוד עם טבלת האמת.

<u>DNF</u>

נסתכל על כל המקומות שבהם קיבלנו t ונרשום "מתי זה קורה":

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge \neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge \neg q\wedge r)$$

אפשר גם כמובן לרשום אותה באופן מקוצר:

$$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$$

<u>CNF</u>

נבנה DNF עבור $\neg(\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r)$:

$$(p\wedge \neg q\wedge r)\vee(p\wedge \neg q\wedge \neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge \neg r)\vee(\neg p\wedge \neg q\wedge \neg r)$$

איך נבנה מזה CNF? נשתמש בכללי בדיסט' ואז: (תוך שימוש גם בכלל של השלילה הכפולה)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

וגם כאן אפשר לצמצם:

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

שלמות פונקציונלית

קבוצת קשרים S נקראת "שלמה פונקציונלית" אם לכל פונ' $f: \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ קיימת נוסחא A מעל $\vec{p} = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ כך ש:

- A מורכבת רק מקשרים ב- S.

- $g_A^{\vec{p}} = f$.

במילים: בהנתן טבלת אמת, הקשרים האלו מספיקים לי כדי לבנות נוסחא שזו טבלת האמת שלה.

<u>מסקנה</u>

הקבוצות $\{\neg, \to\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$ שלמות פונקציונלית.

תרגיל

נגדיר קשר דו-מקומי חדש, לפי טבלת האמת שלו:

p	q	$p \downarrow q$
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	t

התרגיל - הוכח כי $\{\downarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

מה בעצם אנחנו צריכים בשביל זה? מספיק להראות שאת אחת מהקבוצותשאנו יודעים שהם שלמות, אפשר להביע אותה באמצעות הקשר החדש.

למשל:

$$\neg A \equiv A \downarrow A$$
$$(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$$

איך מראים שקבוצה היא לא פונ'? אבל כמו 90% מדברים בקורס הזה - יותר קשה להוכיח שמשהו הוא לא משהו...

תרגיל

הוכח שהקבוצה $\{\neg, \wedge\}$ אינה שלמה פונקציונלית.

הערה: אז איך באופן כללי מראים שקבוצה אינה שלמה פונ'?

מה זה אומר להוכיח את זה? שיש לנו איזה שהיא פונ' אמת (טבלת אמת) שאי אפשר למצוא נוסחא מעל הקשרים האלה שתתאר אותה. אנחנו צריכים להצביע על איזה שהיא פונ' אמת ואז להוכיח שאין נוסחא (מתוך אינסוף הנוסחאות!) שזו טבלת האמת שלה.

אז איך עושים את זה?

יש למצוא תכונה מסויימת שכל הנוסחאות מעל הקבוצה (כלומר שמשתמשות בקשרים מהקבוצה) ואז לבנות טבלת \ פונ' אמת הסותרת זאת.

(מזכיר משהו?)

אז איזה תכונה אנו נוכיח עבור הקבוצה הזו?

טענה: בכל הנוסחאות מעל $\{\neg, \wedge\}$, אם כל הפסוקים האטומיים מקבלים בהשמה מסויימת t אז גם הנוסחא תקבל t באותה השמה.

הוכחה:

כמובן באינדוקציה על מבנה הנוסחא.

בסיס (פסוק אטומי) - מתקיים באופן טריוויאלי.

מעבר - נניח C, B נוסחאות המקיימות את הטענה. אז בהשמה שנותנת t לכל הפסוקים האטומיים ב- B וב- C, אנו יודעים ש (ל.ה.א): $v(B)=v(C)=t$ ולפי טבלאות האמת של הקשרים (גרירה ו"וגם"): $v(B \wedge C)=v(B \to C)=t$.

עכשיו נבנה פונ' אמת שסותרת את זה:

p	q	?
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

(נשים לב שמספיק לנו לסתור רק שורה אחת, כלומר מספיק שיש השמה אחת שזה לא מתאים עבורה)

שבוע הבא נתחיל לדבר על תחשיב הפרדיקטים.