

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 10

הצבות לא חוקיות

נשלים חוב קטן מפעם שעברה. דיברנו אז על הצבות ונתנו את ההגדרה הכללית של הצבה. אמרנו שיש כמה הצבות שלא נרצה להרשות. נזכר מה הכוונה:

$$A = \forall y (F(x) = y \wedge R(z))$$

נניח כי $t = g(y)$. כעת נרצה לבדוק מה זה: $A \{ \frac{t}{x} \}$.

בגלל ש- x שונה מ- y אנחנו "נכנסים" לתוך ה"לכל" ומציבים. זה יגרום לקשירה שאנחנו לא רוצים. כדי להמנע מזה נשתמש בכלל אלפא. נגדיר את:

$$A' = \forall w (F(x) = w \wedge R(z))$$

היא שקולה ל- A . ועכשיו נבצע את ההצבה ב- A , שבו t כן חופשי להצבה במקום x . שאלה בכיתה: האם מותר להציב z במקום x ? כן, זו הצבה חוקית. (נשים לב שאין קשירה) לכל שימוש מעשי, כשאנחנו רוצים להציב משהו, אנחנו נציב משתנה חדש (יש לנו אין סוף משתנים בא"ב, אז לא יהיה לנו חסר).

NDFOL

מה יש לנו במערכת דדוקציה טבעית? האקסיומה שלנו היא: $A \Rightarrow \exists x A$ (נזכר שאנחנו מדברים בו על סקוונטים). ויש לנו כללים של המערכת לכל הקשרים (הכנסה והוצאה לכל אחד מהקשרים). ND ב-FOL יש לה את כל מה שיש לנו ב-NDC בתוספת כללים לכמתים שלנו. מה הם?

$$\begin{array}{c} (\forall I) \quad \Gamma \Rightarrow A \{ \frac{y}{x} \} \\ \hline \Gamma \Rightarrow \forall x A \end{array}$$

הכנסה של "לכל":

זה רק כאשר y חופשי להצבה במקום x ב- A וגם y לא מופיע חופשי ב- Γ או ב- $\forall x A$.

$$\begin{array}{c} (\forall E) \quad \Gamma \Rightarrow \forall x A \\ \hline \Gamma \Rightarrow A \{ \frac{t}{x} \} \end{array}$$

סילוק של "לכל":

בתנאי ש- t חופשי להצבה במקום x ב- A .

אלה הכללים של לכל. כעת של קיים:

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A\{\frac{t}{x}\}}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

הכנסה של "קיים":

כאשר t חופשי להצבה במקום x ב- A .

$$(\exists E) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \exists x A \quad \Gamma, A\{\frac{y}{x}\} \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$$

סילוק של "קיים":

כאשר y חופשי להצבה במקום x ב- A . וגם y לא מופיע חופשי ב- C , ב- $\forall x A$ וב- Γ .

לגבי האחרון: אם מההנחות של Γ אני יכול להוכיח שקיים מישהו שמקיים את A , ועם ההנחות של Γ ובשימוש במישהו שמקיים את זה אפשר להוכיח את C , אז מגאמא אפשר להוכיח את C ישר.

תרגיל

נגסה להוכיח את הסקוונט:

$$\vdash_{NDFOL} \Rightarrow \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$$

מה זה אומר להוכיח סקוונט שאין לא כלום מצד שמאל - כמו להוכיח שזה משפט. (אנחנו הולכים לכתוב את ההוכחה בלי לכתוב את ההנחות בצד שמאל של הסקוונט, אלא רק לסמן את ההנחות, זו היא אחת השיטות שלמדנו לכתיבת הוכחה ב-ND).

$$\begin{array}{c} \frac{[\forall x (A \rightarrow B)]_2}{A \rightarrow B} \quad \frac{[\forall x A]_1}{A} \\ \hline B \\ \hline \forall x B \\ \hline \forall x A \rightarrow \forall x B \quad 1 \\ \hline \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B) \quad 2 \end{array}$$

הבהרות:

- בתחילה לקחנו 2 הנחות ומהם הסקנו דברים.
- למה מ- B נובע $\forall x B$? לפי כלל ההכנסה של לכל (הראשון) וסיפוק התנאים שלהם.

תרגיל

נוכיח כי:

$$\vdash_{ND_{FOL}} \Rightarrow \neg \forall x A \rightarrow \exists x \neg A$$

הוכחה: (מומלץ לקרוא במקביל להסבר מתחתיה)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A]_1}{\exists x A} \quad 1}{[\exists x \neg A]_2}}{\neg A} \\
 \frac{A}{\forall x A} \\
 \frac{[\forall x A]_3}{\neg \exists x \neg A} \quad 2 \\
 \frac{\neg \exists x \neg A}{\exists x \neg A} \quad 3 \\
 \neg \forall x A \rightarrow \exists x \neg A
 \end{array}$$

הסבר:

איך היינו מוכיחים את זה כתרגיל במתמטיקה? כנראה בדרך השלילה. זה מה שנעשה פה. נניח את $\neg A$, ממנו נוכל לקבל ש- $\exists x \neg A$. למה? כי $\neg A$ זה $\neg A$ עם x במקום x וכלהתנאים מתקיימים (הכנסה של "קיים"). אבל אנחנו צריכים בשלילה, כלומר לסתור את זה. אז נסיף עוד הנחה - (2). נזכר בכלל ההכנסה של NOT שאומר שאם אפשר להוכיח גם את B וגם את $\neg B$ אז ההנחה שלי לא נכונה, כלומר אפשר להוכיח את NOT-ההנחה, במקרה שלנו ההנחה היא (1) ואז לפי כלל הסילוק של NOT, מ- $\neg A$ נובע A . כעת נראה את ה"לכל" שוב x מקיים את כל ההגבלות שיש לנו). אבל אנחנו הנחנו (ב- (2) $\neg \exists x \neg A$, ואנחנו רוצים $\exists x \neg A$, לכן נסיף עוד הנחה (היא (3) שאיתה נגיע לסתירה. בסוף נשתמש בהנחה האחרונה על ידי שימוש בכלל ההכנסה של גרירה.

למי שזה לא היה ברור, פשוט צריך לכתוב את ההוכחה שהיינו עושים לזה בדרך השלילה. אחד לאחד זה מתרגם לדבר הזה.

תרגיל

בשיעור הוכחנו או דיברנו על זה שסכום סדרות שואף לסכום הגבולות של הסדרות. אבל לא הוכחנו עד הסוף, רק דיברנו על איך (הראינו סכימת הוכחה). כעת נוכיח משהו דומה בצורה מלאה.

נוכיח:

נתונים:

- ל- π יש את התכונה שאפשר לקרב אותו על ידי הרציונלים - לכל ϵ שגדול מאפס, אפשר למצוא רציוני ש- π פחות המספר הזה קטן מאפס.
- ל- $\sqrt{2}$ גם יש את גם התכונה הזו.
- סכום רציונליים הוא רציונלי.

נוכיח כי ל- $\pi + \sqrt{2}$ יש את אותה התכונה של קירוב דרך רציונלים.

איך היינו מוכיחים את זה? ככה:

$$\begin{array}{l} \text{יהי } \epsilon > 0. \\ \text{מהנתון הראשון, קיים } a_1 \text{ רציונלי כך ש: } |a_1 - \pi| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{מהנתון השני, קיים } a_2 \text{ רציונלי כך ש: } |\sqrt{2} - a_2| < \frac{\epsilon}{2} \\ |(\pi + \sqrt{2}) - (a_1 + a_2)| \leq |a_1 - \pi| + |\sqrt{2} - a_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ a_1 + a_2 \text{ רציונלי.} \\ a_1 + a_2 \text{ רציונלי המקרה את } \pi + \sqrt{2} \text{ עד כדי אפסילון} \end{array}$$

איך נראית ההוכחה בדקדוקיה טבעית? (דף מצורף, עכשיו עוברים עליו)

מה שכתוב למעלה זה הנתונים שהם מוצרנים.

לגבי הטבלה: הטור השמאלי זה פשוט אינדקסים. האמצעי זה צד ימין של הקוונט, השלישי מציין באיזה חוק השתמשנו ועל סמך איזה שורות, הטור הרביעי מציין מה ההנחות שעומדות לי ברקע (מה שבעץ שלנו תואר באינדקסים שנמצאים מעליי).

כעת נעבור על ההוכחה לפי שורות:

- שלוש ראשונות זה הנחות שלנו.
- רביעית זה עוד הנחה.
- 5 זה חוק של ארימטטיקה. זה מתחיל ב"לכל" אז נשתמש בסילוק של "לכל" על ידי הצבת ϵ , ונקבל את מה שיש בשורה 6.
- בגלל שורה 4 וסילוק של גרירה מקבלים את שורה 7.
- ב- 8 פשוט לקחנו את ההנחה 1 על "לכל" והצבנו $\frac{\epsilon}{2}$ במקום ϵ .
- ב- 9 שוב סילוק של גרירה.

- ב- 10 מסלקים את הקיים על ידי הצבה R1.
 - עד 13, שוב עבור $\sqrt{x}$.
 - 14, 15 זה סילוק של "וגם".
 - 16 זה הכנסה של וגם.
 - ב- 17 מסתכלים על ההנחה השלישית ומסלקים את ה"לכל" כאשר מציבים R1. אז מסלקים את ה"לכל" y כשמציבים R2. כיוון שב- 16 היה "וגם", ע"י סילוק של גרירה נקבל שהסכום רציונלי.
 - 20 ו- 21 על ידי סילוקים של "וגם" מ- 13 ו- 10.
 - ב- 22 כבר עשינו כמה כללים ביחד (כדי שיהיה מקום): אי שוויון המשלוש (היינו צריכים לכתוב ולהציב וכו' אבל קיצרנו).
 - קבילנו את 23.
 - ב- 24 עשינו את ההכנסה של "קיים" וקראנו לסכום R.
 - 24, 25, 26 הם מוזרות - למה? כי הן אותו דבר בדיוק. אבל לא! מה אנחנו עושים בהן? אנחנו רוצים להוכיח את מה שאנחנו רוצים להוכיח רק מההנחות שלנו. לאורך הדרך אספנו עוד הנחות דמה ואנחנו צריכים לדאוג שהם יעלמו וזה מה שהשורות הללו עושות - משתמשות בכל מיני כללים על מנת לסלק את ההנחות.
 - ב- 27 מסלקים את ההנחה ש- ϵ גדול מ- 0.
 - ב- 28 מוסיפים את ה"לכל".
- הערה חשובה: בכלל לא השתמשנו במה זה מספר רציונלי, לא היה דרוש ידע מעיבר לכללים של המערכת (רק אי שוויון המשלוש, וחלוקת חיובי לשניים)

HFOL

HFOL בנוי מאסקיומות וכללי היסק. יש את כל האקסיומות של HPC עם תוספות של אקסיומות עבור הכמתים. הראשונות:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x (B \rightarrow A) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A) \\ \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{א} \\ \text{ב} \end{array}$$

שניהם בהגבלה ש- x לא חופשי ב- A.

ויש עוד 2:

$$\left. \begin{array}{l} A\{\frac{t}{x}\} \rightarrow \exists x A \\ \forall x A \rightarrow A\{\frac{t}{x}\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{א} \\ \text{ב} \end{array}$$

שניהם בתנאי ש- t חופשי להצבה במקום x ב-A.

מה לגבי כללי ההיסק שלנו? יש לנו את MP שהיה כבר ב- HPC ויש לנו עוד כלל, כלל ההכללה שאומר:

$$(Gen) \quad \frac{A}{\forall x A}$$

(אין תנאים שבשביל להפעיל אותו)

תרגיל

המערכת $HFOL^*$ מתקבלת מ- $HFOL$ ע"י החלפת $\forall$ ב- $\exists$ ו- (Gen) בכללים הבאים:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \quad \frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow \forall x A} \\ A_2 \quad \frac{A \rightarrow C}{\exists x A \rightarrow C} \end{array} \right\} x \notin FV(C)$$

יצרנו מערכת חדשה. נראה שהמערכות שקולות. מה זה אומר להראות את זה? זה אומר שצריך להראות כי:

$$F \vdash_{HFOL^*} A \iff F \vdash_{HFOL} A$$

$\Leftarrow$ נניח כי $F \vdash_{HFOL^*} A$. מספיק להוכיח:

$$1. \vdash_{HFOL^*} \forall x (B \rightarrow A) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$$

$$2. \vdash_{HFOL^*} \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$$

3. הכלל (Gen) נגזר ב- $HFOL^*$. כלומר אם $\Gamma \vdash_{HFOL^*} A$ אז $\Gamma \vdash_{HFOL^*} \forall x A$.

למה זה מספיק להוכיח אותם? מה זה $HFOL^*$? זה בדיוק כמו $HFOL$ רק שהורדנו כמה והוספנו אחרים. נרצה להראות שאם משהו יכיח ב- $HFOL$ אז הוא יכיח מהדברים של $HFOL^*$, מספיק להראות ששלושת הדברים שהורדנו נמצאים במערכת החדשה ואז אוכל לתרגם כל הוכחה להוכחה ב- $HFOL^*$ (מה שב- $HFOL$ היה אקסיומות כאן יהיו משפטים).

נתחיל מ-3

נניח ש: $F \vdash_{\text{HFOC}}^* A$

למה: אם E פסוק, אז $\vdash_{\text{HFOC}}^* E \rightarrow E$. איך נוכיח את הלמה? כמו שהיינו מוכיחים ב-HPC.
כעת להוכחה של 3:

- 1) $A \rightarrow ((E \rightarrow E) \rightarrow A)$ $[I_1]$
- $\vdash \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ 2) A \end{array} \right.$
- 3) $(E \rightarrow E) \rightarrow A$ $[MP]$
- 4) $(E \rightarrow E) \rightarrow \forall x A$ $[A_1]$
- 5) $E \rightarrow E$ $[I_{\text{משנה}}]$
- 6) $\forall x A$ $[MP]$

כעת להוכחה של 2

נרצה למצוא לו סדרה הוכחה בלי הנחות – לכן חייבים להתחיל עם אקסיומות. נתחיל:

$$1) \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad [I_3]$$

זו היא אקסיומה (ב3)

$$\text{למה 1: } A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash_{\text{HFOC}}^* (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$\text{למה 2: } (A \wedge B) \rightarrow C \vdash_{\text{HFOC}}^* A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

אפשר לחקות את ההוכחה הרגילה ב-HPC.

נמשיך:

- 1) $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad [I_3]$
- 2) $(\forall x (A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B \quad [I_{\text{משנה 1}}]$
- 3) $(\forall x (A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow \forall x B \quad [A_1]$
- 4) $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \quad [I_{\text{משנה 2}}]$

בשביל הצד השני צריך להראות ששני הכללים החדשים שהוספנו נגזרים ב- HFOL הרגיל. זה מושאר כתרגיל.

שוב - הוכחות, גם בהילבט גם בדדקוציה זה דבר קשה וטכני, **מאוד מאוד חשוב לנסות את התרגיל!!!**