

## לוגיקה למדמ"ח - שיעור 6

נסיים קודם חובות מהשיעור שעבר - בעיקר את החוב העיקרי - להסביר איך מוכיחים:

$$\vdash_{HPC} = \vdash_{NDC}$$

(ובאותו הוכחה בדיוק אנו נראה גם ש-  $\vdash_{NDI} = \vdash_{HPI}$ ).

שוב – נזכיר שהכל ברמה של תחשיב הפסוקים, עדיין לא למדנו משהו אחר.

ההוכחה היא שני כיוונים לא קשים במיוחד. נתחיל עם הקל יותר:

$\leq$ :

נראה שאם  $T \vdash_{HPC} A$  אז  $T \vdash_{NDC} A$ .

נניח ש:  $T \vdash_{HPC} A$ , אז יש  $\Gamma \leq T$  סופית כך ש:  $\Gamma \vdash_{HPC} A$  (קומפקטיות). נראה שהסקוונט  $\Gamma \Rightarrow A$

ניתן להוכיח ב-NDC, כלומר  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$  ומזה ינבע ש:  $T \vdash_{NDC} A$ . ההוכחה תהיה קונסטרוקטיבית - היא תקח הוכחה ב-HPC ותעביר אותה להוכחה ב-NDC. ההוכחה כמובן תעשה באינדוקציה על מבנה ההוכחה של A מ-גאמא ב-HPC.

בסיס: (2אפשרויות)

- אם  $A \in \Gamma$  אז  $\Gamma \Rightarrow A$  אקסיומה של NDC, ולכן  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$ .

- A אקסיומה של HPC. כעת עלינו להראות שכל אחת מהאקסיומות של HPC ניתנות להוכחה ב-NDC. נראה ש:  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$  ולכן  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$  (וזזה לפי תרגילון משיעור שעבר - שהוספת הנחות לא מבטלות

יכוחות). אז במקרה בסיס זה יש 10 מקרים. נראה אחד מהם:

נניח A מהצורה 11:  $A = \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  ההוכחה:

$$\begin{aligned} & \varphi, \psi \Rightarrow \varphi \\ & \varphi \Rightarrow \psi \rightarrow \varphi \\ & \Rightarrow \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

שאר המקרים כתרגיל.

מעבר:

נניח ש A הוסק מ-B ו-B בעזרת MP. כלומר:  $\Gamma \vdash_{HPC} B$  ו-  $\Gamma \vdash_{HPC} B \rightarrow A$ . והנחת האידנקציה.

נכונה עבור B ו-B  $\rightarrow A$  כלומר:  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow B$  וגם  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow B \rightarrow A$ . ואז לפי כלל הסילוק של חץ מקבלים:

$$\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$$

אם עושים הוכחת על אורך של היסק אז אומרים שיש סדרה שמסתיימת ב-  $A$  וכל איבר בה הוא אחד משלושה (אסקיומה, שייך לגאמא, או הגיע ע"י שימוש בכלל היסק). הוכחה על מבנה ההוכחה הן יותר קצרות.

$\Rightarrow$

בניח ש:  $\vdash_{NDC} A$  ונראה ש:  $\vdash_{HPC} A$

כיוון ש:  $\vdash_{NDC} A$  אז יש  $\Gamma \subseteq \Delta$  סופית כך ש  $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$

נראה ש:  $\vdash_{HPC} \Gamma \Rightarrow A$  ומזה ינבע  $\vdash_{HPC} A$ . ברור שהוכחה כאן תהיה על מבנה ההוכחה של  $\Gamma \Rightarrow A$

ב-  $NDC$ . ההוכחה תתחלק לשלב הבסיס (אקסיומות של  $NDC$ , למעשה אחת) ואחר כך יהיו עשרה מקרים - ל.ה.א הטענה תהיה נכונה להנחות של כלי ההיסק, ונראה כי מה שנובע מקיים את טעת האינדוקציה.

בסיס:

בניח ש:  $\Gamma \Rightarrow A$  אקסיומה של  $NDC$ , פירוש הדבר ש-  $A \in \Gamma$  ואז כמובן  $\vdash_{HPC} A$

מעבר:

מתחלק לעשרה מקרים, לפי כללי ההיסק של  $NDC$ . לכל אחד מהמקרים מניחים שמה שרוצים להוכיח נכון לגבי ההקדמות של הכלל ומראים שהוא נכון למסקנה שלו (של הכלל). לא נעשה זאת לכל המקרים, אלא רק ל-2 מיוחדים.

נתחיל עם כללי הגרירה:

1. כלל ההכנסה של הגרירה (מסמנים ב-  $(\rightarrow I)$ ). הוא נראה כך:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

מה שצריך להוכיח כאן זה שאם  $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$  אז  $\vdash_{HPC} \Gamma \Rightarrow A \rightarrow B$

אז זה בעיקרון לא טריוויאלי, אבל פה אנו נגמור את זה בשורה אחת - זה נכון לפי משפט הדדוקציה. משפט הדדוקציה הוא המפתח לקשר בין הדדוקציה הטבעית לתחשיב הילברט.

2. כלל הסילוק של גרירה. הכלל הוא:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$$

עלינו להראות שאם  $\vdash_{HPC} \Gamma_1 \Rightarrow A$  ו-

$\vdash_{HPC} \Gamma_2 \Rightarrow A \rightarrow B$  אז  $\vdash_{HPC} \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B$ , וזה טריוויאלי כי  $MP$  הוא כלל של  $HPC$ .

שאר הכללים נעשים באותה צורה וזה מאוד פשוט.  $HPC$  למעשה נבחר כך כדי שיהיה הכי קל להוכיח את זה.

נקח עוד מקרה אחד, מסובך יחסית - כלל הסילוק של "או". הכלל הוא:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \quad \Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow C \quad \Gamma_3 \cup \{B\} \Rightarrow C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}$$

אז שוב, מניחים שהדברים מעל מהקו יכיחים ב-HPC, ומראים למה שמתחת לקו.  
אז אם:

א.  $\Gamma_1 \vdash_{HPC} A \vee B$

ב.  $\Gamma_2, A \vdash_{HPC} C$

ג.  $\Gamma_3, B \vdash_{HPC} C$

אז:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash_{HPC} C$ . ההוכחה עצמה היא מאוד פשוטה. אכן מב' וג' נובע לפי משפט הדדקוציה

של HPC ש:  $\Gamma_2 \vdash_{HPC} A \rightarrow C$  ו-  $\Gamma_3 \vdash_{HPC} B \rightarrow C$ . אז בסך הכל:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash_{HPC} A \vee B \\ \vdash_{HPC} A \rightarrow C \\ \vdash_{HPC} B \rightarrow C \end{array}$$

אם היינו רוצים לבנות מערכת כך שיהיה לנו קל להוכיח את זה, היינו בונים אקסיומה כזו:

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

ובאופן לא מפתיע:  $\vdash_{HPC} (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$  כי זה אקסיומה ב-HPC!  
ע"י הפעלת MP שלוש פעמים מקבלים:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash_{HPC} C$ .

עד כאן השקילות של שני הדברים. בעיקר העניין היה כאן הוא להראות לנו איך בונים הילברט שמתרגמת למערכת דדקוציה טבעית, וגם איך מוכיחים דברים באינדוקציה על מבנה ההוכחה. דברים כאלה צריך לדעת לעשות יחסית בקלות.

נסכם את הפרק הזה של דדקוציה טבעית (נחזור אליו בחצי השני של הקורס - החל מהשבוע הבא, בו נדבר על תחשיב הפרדיקטים). אז היום מסיימים את תחשיב הפסוקים.

שיעור שעבר ראינו שכללי השלילה הם מעט יותר בעייתיים.  
 אמצעי אחר במתמטיקה לטיפול בשלילה, שלא צריך אותו אבל הוא יכול לקצר דברים - זה שימוש בשקילויות.  
 למשל אם רואים להראות ש:  $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$   
 אז יכול להיות שמישהו יגיד (לפי כלל פשוט של "או"):

$$\neg A \Rightarrow \neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

כלל הכנסה של "או"  
 זה לא מעבר טהור של  
 דדוקציה טבעית

במבחן צריך לעשות את השלבים בין השלב השני לשלישי.

אז מה זה שקילות?  
 שקילות זה דבר די מקביל לשוויון. אם שני מספרים שווים זה לזה, מה שאפשר להגיד על אחד, אפשר להגיד גם על השני.

הגדרה: A ו-B שקולים לוגית (יסומן ב-  $A \equiv B$ ) - סימון בקורס הזה, בספרים אחרים זה יכול לסמן את קשר השקילות, מה שאצלנו זה יהיה חץ דו כיווני) אם  $v(A) = v(B)$  עבור כל השמה v.

למה: A שקול ל-B אם  $A \leftrightarrow B$  (ופה זה כבר קשר. הקשר הזה זה קיצור ל:  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ) הינו טאוטולוגיה.

הסיבה העיקרית בשקילויות הוא העובדה הבאה:

טענה: אם  $A \equiv B$  אז לכל נוסחא פ' ופסוק אטומי P, אם מציבים בפ' את A במקום P ואם מציבים את B במקום P, מקבלים נוסחאות שקולות. פורמלית:

$$\varphi\{A/P\} \equiv \varphi\{B/P\}$$

דוגמא: נקח  $A \equiv \neg A$ . לכן נובע מהטענה ש:  $(\neg A \rightarrow B) \vee A \equiv (A \rightarrow B) \vee A$ .

אז זה שאני יכול להחליף חלק מהפסוק במשהו ששקול אליו, זה הרעיון המוצג כאן.

השאלה היא באמת למה הדוגמא נובעת מהטענה? מה הקשר ביניהם?  
 נסו בעצמכם לפני שתמשיכו לקרוא למצוא מה כאן היא פ' ואיזה הצבות עושים בדיוק.

בדוגמא זו:  $\varphi = (P \rightarrow B) \vee A$ , ואז:

$$\varphi\{A/P\} = (A \rightarrow B) \vee A$$

וכיוון ש-A שקול ל-לא לא A

$$\varphi\{\neg A/P\} = (\neg A \rightarrow B) \vee A$$

אז שתי הנוסחאות שקולות.

הוכחת הטענה היא טריוויאלית לחלוטין.

## הוכחה

נניח ש-  $A \equiv B$ . תהי  $v$  השמה. צריך להראות ש:  $v(\varphi\{A, \rho\}) = v(\varphi\{B, \rho\})$ . וכאן בא לעזרתינו

משפט ההצבה (שאוילי כבר שכחנו אותו וזה הזמן להיזכר בו). לפי משפט ההצבה:

כש-  $v' = v$  זהה ל-  $v$  פרט לכך ש-  $v'(A) = v(B)$ . באופן דומה: כש  $v''$  זהה ל-  $v$

פרט לכך ש:  $v''(A) = v(B)$  אבל  $v(A) = v(B)$  (כי  $A \equiv B$ ) ולכן  $v' = v''$  ולכן  $v'(A) = v''(A)$

"את החלק המשמעם ביותר של השיעור עברנו. השעתיים הקרבות גם משעממות אבל פחות."

### רגע של העשרה!

- האם ללוגיקה אינטואיציוניסטית יש סמנטיקה? התשובה היא כמובן כן, אך היא מסובכת.  
- בשביל מה זה טוב הלוגיקה האינטואיציוניסטית הזו? בגלל האופי הקונסטרוקטיבי של ההוכחות. מההוכחות בלוגיקה הזו ניתן להוציא אלגוריתמים. לא ניתן להוכיח שמשווא קיים מבלי להראות איך לבנות את אותו.

אם נתסכל על ההוכחה הקודמת שלנו, נוכל לראות שבאותו מאמץ היינו יכולים להוכיח משהו יותר חזק.

חיזוק ההוכחה:  $A \leftrightarrow B \vdash_{cpl} \varphi\{A, \rho\} \leftrightarrow \varphi\{B, \rho\}$ .

וזה משהו יותר לוקלי - אם לאיזו שהיא שמה  $v(A) = v(B)$  אז כנ"ל לגבי ההצבות (ולא מחייבים מראש שצריך ש-  $v(A) = v(B)$  לכל השמה  $v$ ). ההוכחה דומה מאוד להוכחה שלנו.

## תרגיל

הטענה נכונה גם ב- HPI. כלומר הוכח כי:  $A \leftrightarrow B \vdash_{HPI} \varphi\{A, \rho\} \leftrightarrow \varphi\{B, \rho\}$

לא נוכל להוכיח אותו באותה צורה שהוכחנו את הטענה הקודמת - כי לקודמת נתנו הוכחה סמנטית (טבלאות אמת והשמות). אך עוד לא הגרנו סמנטיקה ל- HPI ולכן נצטרך דרך אחרת לחלוטין. ההוכחה שנראה עכשיו תעבוד גם על הטענה המקורית (אך ההיפך כמו שאמרנו אינו נכון).

אז איך נוכל לעשות את זה?

רמז: זה נכון עבור כל  $A, B$  ופי. (לפני שעוברים לעמוד הבא: נסו לחשוב על הפתרון!)

נעשה את זה באינדוקציה! אינדוקציה על סיבוכיות של נוסחא כמובן, אבל של מי? על הסיבוכיות של פ'. ("את האינדוקציה אתם תעשו, לא אני").

אז מתחילים עם מה פ' יכול להיות - הכי פשוט זה שהוא פסוק אטומי ולזה יש לנו 2 אפשרויות:

אם פ' הוא P עצמו, או פ' הוא Q (והחלפה כאן לא עושה כלום). כשפ' הוא הפסוק האטומי P אז כתוב לנו בצד ימין של הנביעה (כלומר לאחר ההצבה)  $A \leftrightarrow B$ . ולכן באופן טריוויאלי למדי זה נכון.

מעבר האינדוקציה:

נניח שזה נכון לפי 1 ופי 2 ונראה שזה לדוגמא נכון עבור פ' 1 וגם פ' 2 ולזה צריך לתת הוכחה בעזרת הכללים של HPI (טוב אז למעשה לא נראה). וכמובן צריך להראות זאת לגבי שאר כללי הבניה של נוסחא.

אז השימוש העקרי של שקילויות הוא הצבה בנוסחאות. עכשיו יש כמובן אין סוף שקילויות נכונות. נעיף מבט כעת בדף שחולק בשיעור ונבצע סקירה קצרה שלו:

הגדרה של **nnf - negation normal form**:  
פסוק פ' נמצא ב-nnf אם קשר השלילה מופיע בו (אם בכלל) רק לפני פסוקים אטומיים

קבוצה 1:  
שקילויות של שלילה.

קבוצה 2:  
שקילויות של גרירה.

קבוצה 3:  
מטפלת בחוקים בססיים של או \ וגם. אסוטיאטיביות לדוגמא מאפשרת לנו לוותר על סוגריים. בעזרתם לדוגמא:  $A_1 \vee A_3 \vee A_5 \vee A_1 \vee A_3 \equiv A_3 \vee A_1 \vee A_5$  (נשים לב שצריך שלושה מהם: אסו' כדי לא לכתוב סוגריים, קומ' כדי להעביר את שני ה-A1 שיהיו אחד ליד השני, ואידמפוטנטיות כי לאחד ביניהם)

קבוצה 4:  
יש לה תפקיד (בין היתר) והוא להמשיך מ-nnf לצורות "עוד יותר נורמלית" והן נקראות DNF ו-CNF. "צורה דיסיונקטיבית נורמלית" ו"צורה קוניוקטיבית נורמלית" בהתאמה. מה זה אומר?

מושג טכני: ליטרל - פסוק אטומי או שלילת פסוק אטומי.

DNF = דיסיונקציה של קוניוקציות של ליטרלים.  
CNF = קוניוקציה של דיסיונקציה של ליטרלים.

החוקים הדיסטרביוטים יחד עם כללי השלילה מאפשרים להביא כל פסוק ל-DNF או CNF.

נדגים את זה על  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$ . זה כמובן לא ב-DNF או CNF כי יש כאן את קשר הגרירה. אז כדי להגיע לאחת הצורות עלינו דבר ראשון להפטר מקשר הגרירה. אז נשתמש בכללים מקבוצה 2 ונקבל:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \\ \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg \neg p \vee \neg q) \end{aligned}$$

עדיין לא ב-DNF או CNF (ואפילו לא ב-nnf שזה מקרה יותר כללי מהם). נמשיך:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \\ \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg \neg p \vee \neg q) \\ \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \end{aligned}$$

וכאן הגענו ל-CNF.

איך מגיעים מכאן ל-DNF? אם נפתח את הסוגריים לפי חוקי הפילוג, נגיע ל-DNF:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \\ \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\ \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\ \equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \end{aligned}$$

צורה כבר צורה דיסיונקטיבית, וכל אחד מהרכיבים הוא קוניוקציה של ליטרלים - אז זה DNF. וזו היא לאו דווקא הצורה הקצרה ביותר, לדוגמא את הרכיב השמאלי אפשר להעיף ולקבל צורה יותר קצרה.

נשים לב לדוגמא ש:  $p \wedge \neg p$  נמצא גם ב-CNF וגם ב-DNF (ודאו שאתם מבינים מדוע).

אז תמיד אפשר להגיע לשתי הצורות הללו:

- מעיפים את קשר הגרירה.
- מגיעים ל-nnf.
- פתוחים בעזרת החוקים המתאימים על מנת להגיע ל-DNF או CNF.

שימוש לצורה CNF הוא לבדוק האם משהו הוא טאו'. השיטה שלנו עד עכשיו הייתה עשינו טבלת אמת. יכולנו גם להוכיח ב-HPC אך זו לא שיטת הכרעה. אז בעצם הייתה לנו רק שיטת הכרעה אחת (טבלאות אמת). נציע כעת שיטת אחרת.

נביא את הפסוק לצורה CNF:  $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$

כאשר  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  דיסונקטיות של ליטרלים.

על מנת שזה יהיה טאוטולוגיה צריך שכל אחד מה  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  יהיו טאו'. אז אם למשל:

אז מה צריך להתקיים כדי שהוא יהיה טאו'? שכל  $L_i$  יהיו טאו'. לא נכון! הם ליטרלים, הם לא יכולים להיות טאו'. התנאי שצריך להתקיים הוא שיופיע פסוק אטומי ושיליתו. (חישבו מדוע זה הוא תנאי שקול).

אז הדרך החדשה שלנו היא גם לא ממש יעילה. להעביר לצורה CNF ולבדוק שבכל קוניונקציה יש ליטרל והנגדי לו.

עולה שאלה כללית - למה בחרנו דווקא את הקשרים האלו ולא אחרים? (כלומר למה דווקא בחרנו את "או" וגם "גרירה" ו"שלילה"?). [אנחנו גם יודעים שאנחנו יכולים לוותר על כמה קשרים שיש לנו, כמו למשל הגרירה ולהביע אותו באמצעות אחרים] יכולנו לדוגמא לקחת את הקשר if\_then\_else. אולי יש קשרים שאי אפשר לבטא עם הקשרים שלנו. אז התשובה היא לא. כל קשר שמוגדר על ידי טבלאות אמת ניתן לבטא באמצעות הקשרים שלנו. נראה זאת בצורה פורמלית.

### הגדרה

תהי  $\mathcal{P}$  נוסחא ויהיו  $p_1, \dots, p_n$  נוסחאות אטומיות (הם משתנים עבור נוסחאות אטומיות) הכוללות את כל הנוסחאות האטומיות שמופיעות ב $\mathcal{P}$ .

הפונ'  $g_{\mathcal{P}}^{\vec{p}}$  מ-n ערכי אמת לאחד (כלומר:  $g_{\mathcal{P}}^{\vec{p}}: \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$ ) כך ש:  $g_{\mathcal{P}}^{\vec{p}}(x_1, \dots, x_n) = v(\varphi)$

(כאשר  $v$  היא השמה כך ש:  $v(p_1) = x_1, \dots, v(p_n) = x_n$ ) היא הפונ' שמושרה על ידי  $\mathcal{P}$ .

## דוגמא להגדרה

עבור הנוסחא  $\varphi = p_3 \rightarrow p_2$  נסתכל על 2 פונ' שמושורות ממנה:

|   |   | $g_{\varphi}^{<p_3, p_2>}$ | $g_{\varphi}^{<p_2, p_3>}$ |
|---|---|----------------------------|----------------------------|
| t | t | t                          | t                          |
| t | f | f                          | t                          |
| f | t | t                          | f                          |
| f | f | t                          | t                          |

יכולנו גם כמובן להתסכל על  $g_{\varphi}^{<p_2, p_3, p_5>}$  (כי לפי ההגדרה, צריך קבוצה של פסוקים אטומיים שמכילה את כל הפסוקים האטומיים שבנוסחה – אבל אפשר שיהיו יותר מאלה שבנוסחה).

## טענה

לכל  $\varphi: \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$  יש נוסחא פי ופסוקים אטומיים  $p_1, \dots, p_n$  כך ש-  $\varphi = g_{\varphi}^{\vec{p}}$ .

## דוגמא לטענה

נסתכל על הטבלה מהדף שחולק בכיתה (זה לגבי מערכת אוניברסלית) מסתכלים על השורות שבהם הקשר \ פונ' מקבל T. אז הוא מקבל T במקרים הבאים:

$$p \wedge q \wedge r, p \wedge q \wedge r^i, p^i \wedge q \wedge r, p^i \wedge q^i \wedge r$$

בניסוח שקול, כאשר הנוסחא הזו נכונה:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r^i) \vee (p^i \wedge q \wedge r) \vee (p^i \wedge q^i \wedge r)$$

ולכן הנוסחא הזו משרה עם הפסוקים האטומיים  $p, q, r$  את טבלאות האמת של if\_then\_else. אז יש לנו דרך למצוא אותה ישירות.

עשינו שני דברים במכה אחת:

באמצעות טבלת אמת הצלחנו לבנות פונ' שבונה אותה, וגם יש להביא אותה ל- DNF

וזו עוד דרך להעביר כל נוסחא לצורות DNF בלי לעבור דרך החוקים: לעבור דרך הטבלה של הנוסחא. הדרך הזו כל כך ברורה שאנחנו נספק בדוגמא ולא נוכיח פורמלית את הטענה. יכול אולי להיות מקרה אחד של בלבול. מתי הוא? מתי יש לנו בעיה? אמרנו לקחת את כל המקומות שהם T,

לעשות להם ככה וככה וכו'. הבעיה היא מה לעשות כאשר אין בשום שורה בטבלה T....

אז במקרה כזה נוכל פשוט לקחת  $\rho_{12}$  (זה יתן לנו אפילו לפונ' של למספר משתנים - אם מישהו רוצה שיופיע

בפונ' דו מקומית כל המשתנים, כלומר גם  $p_1$  וגם  $p_2$  אז הוא יכול לקחת את  $p_1, p_2$ .

אנו שמים את הדגש על הצד הפרקטי \ אלגוריתמי ולא על ההוכחות (כי זה ברור).

## עוד כמה הערות:

אפשר לפשט דברים, למשל ב:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

נוכל לעשות:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (p \wedge q) \wedge (r \vee s) & & (r \vee p) \wedge (q \vee s) \end{array}$$

(הוצאנו מהזוג הימיני ומהזוג השמאלי "מחוץ לסוגריים" – לפי כללי השקילות)

אבל אם נחבר ב"או" לא נקבל צורה נורמלית:

$$(p \wedge r) \wedge (q \vee r) \quad \vee \quad (r \wedge q) \wedge (q \vee r)$$

אבל יש לנו שם כמה טאו' שאפשר להפטר מהן ולקבל

זו לא צורה מלאה (באחד חסר  $z$  בשני חסר  $q$ ).

אפשר את הכל לייצר באמצעות CNF - על ידי שעושים אותו דבר עם השורות שהן F. (דוגמה בדף)  
זה נכון כי נבנה את NOT פ', ואז נעשה לזה שלילה (וזה על פי הכללים אמור להפוך "וגם" ל"או"ים ולהיפך):

$$\begin{aligned}\psi &\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \dots \\ \varphi &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \dots\end{aligned}$$

עד כאן לגבי CNF ו-DNF ושלמות פונקציונלית.

כל פונ' אמת ניתן לבטא באמצעות NOT ו"וגם" - כלומר מצאנו 2 שמספיקות. "אז מה ישאל מתמטיקאי?" האם יש אחת כזו שמספיקה. אז אכן יש כזו: NOR. (גם !NAND)

מספיק להראות שזה מבטא את AND ואת OR ובזה נוכל להראות שהוא מבטא את הכל.