

לוגיקה למדמ"ח - תרגול 14

תרגול חזרה

היום נראה כל מיני שאלות ממבחנים ועוד שאלות חשובות.

תרגיל 1

א. הצרן את הטענות הבאות:

1. סטודנט יקרא מצוין אם הוא יכול לפתור את כל הבעיות בלוגיקה.
2. אף סטודנט לא יכול לפתור את כל הבעיות בלוגיקה.
3. קיימת בעיה בלוגיקה שאף סטודנט לא יכול לפתור.
4. אף סטודנט אינו מצוין.

הדבר הראשון כשחושבים על הצרנה, זה שיש מקום להשתמש בלוגיקה רב סוגית. למה? כי יש לנו 2 סוגים של עצמים: סטודנטים ובעיות בלוגיקה. אז גם בשביל התרגול אנחנו נעשה את זה בצורה הזו.

אז הדברים שצריך להגדיר:

סוגים: סוג s עבור סטודנט, וסוג p עבור בעיה בלוגיקה.

משתנים: x^s , y^p .

יחסים: (נזכור, צריך להגדיר גם את היחס וגם את הסוגים עליהם הוא פועל)

$ex: s \rightarrow o$

$solve: s * p \rightarrow o$

אז איך תראה ההצרנה?

המשפט הראשון הוא הגדרה אז הוא יתחיל ב"לכל":

$$1. \forall x^s (ex(x^s) \leftrightarrow \forall y^p solve(x^s, y^p))$$

האם במבחן צריך לתרגם? תלוי. אם לא ביקשו אפשר פשוט להגיד שאנחנו משתמשים בלוגיקה רב סוגית. לפעמים אפילו ידרשו דווקא כן להצרין בלוגיקה רב ערכית. תזכורת: בלוגיקה רב סוגית תמיד אנחנו מציינים את המשתנה יחד עם הסוג שלו.

הצרנת שאר המשפטים:

$$2. \neg \exists x^s \forall y^p solve(x^s, y^p)$$

$$3. \exists y^p \forall x^s \neg solve(x^s, y^p)$$

$$4. \neg \exists x^s ex(x^s)$$

עכשיו נתרגם חזרה לחד סוגית (לא בטוח שחייבים במבחן, אנחנו עושים את זה גם בשביל התרגול).

דבר ראשון, נוסיף לשפה 2 פרדיקטים חד מקומיים: s, p (כי היו שני סוגים ואנחנו מוסיפים פרדיקטים שישמשו כאינדיקטור) צריך גם לתרגם משתנים. אז נגדיר:

$$Tr[x^s]=x, Tr[y^p]=y$$

נתחיל לתרגם את הטענות. של 1:

$$1. \forall x(s(x) \rightarrow (ex(x) \leftrightarrow \forall y(p(y) \rightarrow solve(x, y))))$$

(נזכור - "לכל" הולך עם גרירה) אז ככה מתרגמים "לכל" בלוגיקה רב סוגית.

זה שקול ל:

$$1. \forall x \forall y(s(x) \rightarrow (ex(x) \leftrightarrow (p(y) \rightarrow solve(x, y))))$$

פשוט הוצאנו את ה"לכל" y החוצה כי אין y חופשי במקומות המתאימים. נעשה אז זה כדי להגיע לצורה פרנקסית נורמלית. לא חייבים אבל זה יעזור לנו בהמשך.

התרגום של 2:

$$2. \neg \exists x(s(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow solve(x, y))) \equiv \forall x \exists y(\neg(s(x) \wedge (p(y) \rightarrow solve(x, y))))$$

קיים הולך עם "וגם". בשקילות אנחנו העברנו את הפסוק שלנו ל-PNF. נוציא את לכל y החוצה ואז מה נותר לעשות? להכניס את ה-NOT. וזה מה שעשינו.

והתרגום של השאר:

$$3. \exists y(p(y) \wedge \forall x(s(x) \rightarrow \neg solve(x, y))) \equiv \exists y \forall x(p(x) \wedge (s(x) \rightarrow \neg solve(x, y)))$$

$$4. \neg \exists(s(x) \wedge ex(x)) \equiv \forall x(\neg(s(x) \wedge ex(x)))$$

אז תרגמנו את כל הטענות. האם זה מספיק? לא. זה לא מספיק כי צריך גם להצרין את התורה של

השפה - $Th(L)$ (למעשה זה של הסיגנטורה, כלומר $Th(\sigma)$)

יש כמה דברים שאנחנו דורשים כדי לשמור על המשמעות. והם מתוארים ב- $Th(\sigma)$.

למשל:

$$\psi_1 = \forall x(ex(x) \rightarrow s(x))$$

כי כשהגדרנו את מצויין הוא פעל על סטונדטים. והדבר השני הוא:

$$\psi_2 = \forall x \forall y(solve(x, y) \rightarrow s(x) \wedge p(y))$$

והאחרון:

$$\psi_3 = \forall x(\neg(s(x) \wedge p(x)))$$

לא צריך להגיד גם שהוא אחד משניהם? כן בעיקרון. יש כאלה שעושים את זה ש-p לא ריק וכאלה.

אבל מה שעשינו מספיק.

אז כעת - מה ההצרנה המלאה של הנוסחא 1 (נקרא לה φ_1). ככה:

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \rightarrow \varphi_1$$

כלומר שפסוקי $Th(\sigma)$ גוררים את התרגום של נוסחא 1.

וכאן נסיים את הסעיף.

ב. הוכח או הפרך (אם לא - מצא דוגמא נגדית. אם כן - הוכח בעזרת משפט הרבנרד).

(1) טענה 3 נובעת מטענות 1,2.

מה זה אומר נובעת? איזה נביעה? חשוב לשים לב שהכל פסוקים וכל זה זהה ואפשר לכתוב נובעת בלי להתייחס לזה. (כנ"ל לגבי ספיקות אם מדובר בפסוקים).

האם יש הצרנה שהיא לא של פסוקים? יכול להיות אבל פחות נפוצה. כי כשמצרנים זה בדרך כלל משפטים כוללים או שזה משפטים על מישור ספציפי ("יוסי אוהב שוקולד", ואז יוסי יהיה קבוע וזה עדיין יהיה פסוק).

אז האם זה נכון או לא? וודאי שלא. צריך להראות דוגמא נגדית לנביעה. כלומר להראות מבנה שיספק את טענות 1,2 ולא יספק את 3.

אז התחום שלו יהיה:

$$D = \{1, 2, a, b\}$$

עכשיו לפירושים:

$$I[solve] = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$I[ex] = \emptyset$$

בנינו אותה על סמך ההנחה שכל סטודנט מצא בעיה שהוא פותר ויחד הם מכסים את הכל, אבל אין סטודנט שיודע לפתור הכל. הטענה הראשונה לא קשורה - מה אכפת לי אם לא יהיה סטודנט מצוין. כדי להוכיח שאין נביעה לא מספיק לתת במבחן עמוד שלם של "יש סטודנט שבמצב וכו'". צריך לראות מבנה - תחום ופירושים. לעבוד לפי הגדרות.

(2) טענה 4 נובעת מ-1,3.

זה די ברור שהדבר הזה נכון. למה? משיקולים של t/f . הגיון כללי. אבל מה הבעיה - צריך להראות שבכל מבנה ובכל השמה. אבל ביקשו מאיתנו להוכיח בעזרת משפט הרבנד. אז אנחנו צריכים להוכיח בעזרת משפט הרבנד ש:

$$\varphi_1, \varphi_3 \vdash \varphi_4$$

איך עובדים עם המשפט הזה כשרוצים להוכיח נביעה ויכוחות? אומרים שהביטוי האחרון (זה עם הנביעה, זה ממש מעלינו) מתקיים אם ורק אם:

$$\models \text{אם } T = \{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$$

$$\models \text{אם } \text{Prenex}(T)$$

אז מה הפרנקסים שלנו? אז במקרה כבר חישבנו אותם ועכשיו:

$$\forall x \forall y (s(x) \rightarrow (ex(x) \rightarrow (p(y) \rightarrow solve(x, y))))$$

$$\exists y \forall x (p(x) \wedge (s(x) \rightarrow \neg solve(x, y)))$$

$$\neg \exists (s(x) \wedge ex(x)) \equiv \exists (s(x) \wedge ex(x))$$

נמשיך עם השקילויות של אםם:

$$\models \text{אם } T = \{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$$

$$\models \text{אם } \text{Prenex}(T)$$

$$\models \text{אם } sk(\text{Prenex}(T))$$

אז מה שקבוצה האחרונה מכילה (הסקולם מוריד את הכמתים הישנים)?
 $\{\varphi_1, \forall x(p(c) \wedge (s(x) \rightarrow \neg \text{solve}(x, y))), s(d) \wedge \text{ex}(d)\}$
 זו קבוצת הפסוקים האוני' שהקבוצה המקורית שלנו לא ספיקה אם"ם זו לא ספיקה.
 נותר לבדוק האם היא ספיקה. זה בדיוק משפט הרברנד.

מה אנחנו עושים דבר ראשון?
 מה זה מרחב הרברנד שלנו פה? יש לנו קבועים c ו-d. ואין עוד (כי לא היו קודם ואלה השניים היחידים שהוספו). מה הפונקציות שלנו? אין. ולכן כל המרחב שלנו הוא:
 $\{c, d\}$

עכשיו צריך להתכל על קבוצת האינט' הסגורות של המטרציות של הקבוצה שלנו.
 מה זה אומר? להציב במוקם משתני חופשיים איברים מהתחום (מהמרחב הרברנד). אז:

$$\tau^* = \{ s(d) \wedge \text{ex}(d), p(c) \wedge (s(d) \rightarrow \neg \text{solve}(d, c)), \\ , s(d) \rightarrow (\text{ex}(d) \leftrightarrow (p(c) \rightarrow \text{solve}(d, c))), \dots \}$$

(השלוש נקודות בסוף הם חשובות, יש עוד איברים)
 אנחנו מנסים להראות שיש תת קבוצה חלקית שהיא לא ספיקה.
 עכשיו אנחנו בודקים את זה ברמה של תחשיב הפסוקים. נניח שיש השמה שמספקת את הפסוקים הראשונים שאנחנו רואים כאן ב- T^* . אז אנחנו יודעים ש- $s(d)$ הוא t ו- $\text{ex}(d)$ הוא t. לכן כעת $p(c)$ הוא t וגם $\neg \text{solve}(d, c)$ הוא t. וכך הלאה עד שנראה את הסתירה (די מהר)

הקבוצה הזו לא ספיקה - ולכן המקורית היא לא ספיקה - ולכן יש נביעה. ככה מוכיחים נביעה באמצעות משפט הרברנד.

תרגיל טוב לחזרה למבחן זה אם יבקשו להוכיח באמצעות דדוקציה טבעית במקום באמצעות משפט הרברנד.

תרגיל 2

הוכח או הפרך:
 קיים אלגוריתם לבדיקת תקפות של פסוק מהצורה:

$$\psi = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \varphi$$

כאשר φ היא נוסחא בלי כמתים, בלי שוויון ובל' סימני פונקציה.

אז התשובה היא כן. הוכחה:
 φ תקף $\iff \neg \varphi$ לא ספיק.
 אנחנו יודעים ש:

$$\neg \psi = \exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \neg \varphi$$

אנחנו רוצים לבדוק האם הוא ספיק. הכי נוח זה לעשות את זה עם הרברנד. זה כבר בצורה פרנסקית. נעשה לזה סקולם:

$$Sk(\gamma\varphi) = \forall \gamma_1 \dots \forall \gamma_m (\gamma\varphi) \left\{ \frac{c_1}{x_1}, \dots, \frac{c_m}{x_m} \right\} \quad (= T)$$

כאשר c_i קבועים חדשים. איך אנחנו בודקים האם זה ספיק? לפי מרחב הרברנד:
המרחב: $\{c_1, \dots, c_m\} \cup \{\varphi\}$.

מרחב הרברנד הוא סופי ולכן גם T^* סופית, ולכן ספיקותה כריעה.
אם המרחב הרברנד הוא סופי אז קבוצת האינסטנסיות סגורות של המטריצות של T היא סופית (מספר סופי של הצבות). ואם יש לי קבוצה סופית של פסוקים בתחשיב הפסוקים אפשר להכריע באמצעות טבלת אמת.

דרשו גם שאין שוויון, למה? כי לפעמים יש בעיה עם הצבות שהן צריכות לקיים את אקסיומת השוויון.
בשביל לבדוק ספיקות צריך לטפל באקסיומות של השוויון. בשביל לבדוק ספיקות של נוסחא עם שוויון.
למעשה זה יכול לעבוד גם עם אבל זה סתם מסבך.

נשים לב שאם זה לא היה פסוק אלא נוסחא זה עדיין היה עובד. (אנחנו לא אומרים לדעת את זה, מיד במשפט הבאה נהפוך לאנשים שיודעים את זה. בלי לחץ.) זה נוסח בתור פסוק כי אנחנו לומדים על העברה לסקולם ששומרת על הספיקות רק עם פסוקים. אבל זה תקף גם לנוסחאות פשוט לא למדנו.

תרגיל 3

נגדיר לוגיקה 4 ערכית. מה צריך בשביל זה?
צריך להגדיר את ערכי האמת:

$$S = \{0, 1, BOTTOM, TOP\}$$

ולחלית מי הערכים המצוינים:

$$D = \{T, 1\}$$

טבלת האמת של הגרירה תהיה:

$$\neg(a, b) = \begin{cases} 1 & a \notin D \\ b & a \in D \end{cases}$$

ונניח גם שהגדרנו את שאר טבלאות האמת (זה פשוט לא רלוונטי לעכשיו).

הוכך הוא הפרך: משפט הדדוקציה תקף בלוגיקה זו.
אנחנו רוצים לבדוק האם הטענה:

$$T \vdash A \rightarrow B \quad (\Leftrightarrow) \quad T, A \vdash B$$

לא חכם לנסות להפריך - כדאי לנסות להוכיח ולראות האם נתקעים.

הוכחה:

$\Rightarrow$:

נניח ש: $\mathcal{T} \vdash A \rightarrow B$. תהי v השמה המספקת את $T \cup \{A\}$. אז $v(A) \in D$. מזה נובע:

$$v(A \rightarrow B) = v(B)$$

אבל v מספקת את T , לכן לפי ההנחה $v(A \rightarrow B) \in D$ ולכן $v(B) \in D$.
חשוב לשים לב! מספקת זה $\in D$ ולא $= 1$.

$\Leftarrow$:

נניח ש- $\mathcal{T}, A \vdash B$. תהי v השמה המספקת את T .

- אם $v(A) \notin D$ אז אומר (לפי הגדרת הגרירה) $v(A \rightarrow B) \in D$. וזה מה שרצינו להראות.
- מה אם $v(A) \in D$. אז v מספקת את $T \cup \{A\}$ ולכן היא מספקת את B . אבל $v(A \rightarrow B) = v(B) \in D$ ולכן גם במקרה הזה זה קורה.

משפט הדדקוציה תקף בלוגיקה הזו. אפשר באותו מידה לשאול (לשחק בבית):
נשנה את D - האם עדיין תקף? נוסיף או נוריד ממנו? וכך הלאה והאלה, ונוסיף אולי עוד ערך, נשנה את ההגדרה של גרירה (לשחק באופן כללי עם הנתונים ולראות מה קורה).

תרגיל 4

א. הוכח או הפרך:

$$\Gamma \vdash^t A \text{ אם ורק אם קיימת } \Gamma_0 \leq \Gamma \text{ סופית כך ש: } \Gamma_0 \vdash^t A.$$

$\Rightarrow$: נכון מהמונוטוניות של יחס נביעה.

$\Leftarrow$: נניח ש- $\Gamma \vdash^t A$. יש 2 אפשרויות:

- אם גאמא לא t -ספיקה. ממשפט הקומפקטיות (זה דברים שחייבים לכתוב במבחן - כלומר את

"ממשפט..." ולא ישר את מה שנובע) יש $\Gamma_0 \leq \Gamma$ סופית שאינה t -ספיקה. ואז $\Gamma_0 \not\vdash^t A$.

- אם גאמא t -ספיקה. (עכשיו אי אפשר להשתמש בממשפט הקומפקטיות - נוח להשתמש בו על דרך השלילה). נשים לב להנחה שלנו. אז $\Gamma \cup \{\neg A\}$ הוא לא t -ספיק (מעבר חשוב שאנחנו עושים הרבה, גם בשימוש בממשפט הרברנד). ממשפט הקומפקטיות יש $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$ שאינה t -ספיקה. בגלל ההנחה של הנקודה הזו: $\neg A \in \Delta$ וזה מאפשר לכתוב את דלתא בתור: $\Delta = \Delta_0 \cup \{\neg A\}$ סופית ועליה אנחנו יודעים שהיא לא t -ספיקה. מזה אנחנו מקבלים ש- $\Delta_0 \vdash^t A$.

ב.

$$\text{הוכח או הפרך: } \Gamma \vdash^v A \iff \exists \Gamma_0 \leq \Gamma \text{ סופית כזו: } \Gamma_0 \vdash^v A.$$

אפשר להגיד ש- v -נביעה שקולה ליכיחות (לפי ממשפט השלמות) אם $\Gamma \vdash^v A$ אז A יכיח מתת קבוצה סופית של גאמא. אבל נעשה הוכחה שוב כי זה יותר מעניין. הוכחה:

$$\Gamma \vdash^v A \Leftrightarrow \forall \Gamma \vdash^v \forall A \Leftrightarrow \forall \Gamma \vdash^v \forall A$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_0 \vdash^v \forall A \text{ כן } \exists \text{ מודל } \Gamma_0 \models \forall A$$

גאמא 0 זה תת קבוצה של קבוצה של סגורים - אז היא מורכבת מסגורים גם כלומר מפסוקים, ולכן:

$$\Leftrightarrow \Gamma_0 \vdash^v \forall A \Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash^v A$$

$$\parallel$$

$$\{\forall \varphi_1, \dots, \forall \varphi_n\}$$

האם אפשר להשתמש בהוכחה הקודמת בדיוק? אפשר להשתמש בה. לכתוב v במקום t בכל מקום. זה אפילו מעביר דרך שקילות ששווה לזכור.

תרגיל 5

תזכורת: סקולמיזציה - לוקח פסוק ומעביר אותו לפסוק שהוא ספיק אם"ם המקורי הוא ספיק (משמר ספיקות). כמובן לא דוקא באותו המבנה.

הוכח או הפרך:

A ו-B פסוקים.

אם A תקף אז $Sk(A)$ תקף.

האם אפשר לחשוב על פסוק תקף, שאם נעשה לו סקולומיזציה אז הוא יהפוך ללא תקף?

הרעיון הוא משהו כזה:

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists y P(y) \equiv \exists x P(x) \wedge \forall y \neg P(y)$$

ואז:

$$Prenex(A) = \exists x \forall y (P(x) \vee \neg P(y))$$

$$SK(Prenex(A)) = \forall y (P(c) \vee \neg P(y))$$

ונבחר כדוגמא נגדית:

$$D = \mathbb{N}$$

$$I[P] = \{1\}$$

$$I[c] = 0$$

זו היא דוגמא נגדית שמראה שזה לא תקף. מה עם זה: אם $Sk(A)$ תקף אז A תקף.

זה דווקא כן נכון אבל איך נוכיח את זה? בשלילה: אם A לא תקף אז $Sk(A)$ לא תקף.

נשים לב: A שקול לפרנקס של A (שקול לגמרי). אז נוכיח ל"האם הפרנקס של A לא תקף".

ההוכחה באינדוקציה על תהליך ה-Sk. נוכל לעשות אינד' כי אנחנו עובדים עם הצורה הפרנקסית.

כולמר מעכשיו נניח כי A הוא פרנקס.

בסיס: אם אין ב- A "קיים" אז $Sk(A)=A$ וסיימנו.

צעד א': $A = \exists x \varphi$ במקרה זה:

$$Sk(A) = \varphi\left\{\frac{c}{x}\right\}$$

A לא תקף אז קיים M כך ש- M לא מספק את $\exists x \varphi$ זה אומר שלכל $a \in D$ אז M לא מספק את $\varphi\left\{\frac{a}{x}\right\}$. לכן M גם לא מספק את $Sk(A)$ כי זו בדיוק הצורה של הסקולם של A. ומה זה אומר? שהוא לא תקף. מצאנו מבנה שלא מספק אותו - אז הוא לא תקף.

הצעד האחרון:

אם A הוא מהצורה

$$A = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi$$

A לא תקף אז קיים M שלא מספק אותו. כלומר קיימים $a_1, \dots, a_n \in D$ כך שלכל $b \in D$:

$$(*) \quad M \not\models \varphi\left\{\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}, b\right\}$$

מה הסקולם של זה: $Sk(A) = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi\left\{\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{y}\right\}$

נניח שיש M' כן $M \leq M'$:

$$M' \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi\left\{\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{y}\right\}$$

גבול, נניח $a_1, \dots, a_n$ - למי:

$$M' \models \varphi\left\{\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}, \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{y}\right\}$$

$I[F], A, \beta$:

$$I[f(x_1, \dots, x_n)] \in D$$

כי $\otimes$

$$M' \not\models \varphi\{\dots\}$$

לכן הסקולם של A לא תקף.

באותו הוכח או הפרך:

$$A \rightarrow B \text{ נכון} \Rightarrow Sk(A) \rightarrow Sk(B) \text{ נכון}$$

נשים לב שזה סקולם גורר סקולם ולא סקולם של גרירה. אנחנו מניחים שבכל סקולם הוספנו פונקציות ומשתנים שונים.

זה לא נכון - בשביל זה צריך לקחת דברים קיצוניים (להמציא דוגמא זה בדרך כלל לא עובד). למשל נקח את ה- A שהיה לנו בסעיף א.

$$A = \exists x P(x) \vee \exists y P(y)$$

הוא תקף (לא סתם ספיק). הסקולם של זה לא תקף (הוכחנו כבר). זה אומר לנו ש:

$\models (A \rightarrow B)$ ספיק. למה? כי מה זה אומר שהסקולם של A לא תקף. יש מבנה שבו הסקולם של A

הוא f ולכן כל הגרירה הזו היא t ומצאנו מבנה שיספק את זה.

עכשיו האם אפשר למצוא איזה שהוא B כך ש: $A \rightarrow B$ לא יהיה ספיק. וזה צריך להיות בכל מבנה. זה לא

בעיה - פשוט נקח סתירה: $B = \forall x (P(x) \wedge \neg P(x))$.

פסוק תקף גורר סתירה הוא לא ספיק אבל הסקולמים שלהם כן גוררים אחד את השני זה ספיק.

עוד דוגמא שהרבה נתנו זה של האינדוקציה (זה פסוק שאמרנו שהוא טוב להפרכות).

תרגיל 6 - על תחשיב הפסוקים

הוכח או הפרך:

א. לכל אלפא, ביטא, גאמא אם אלפא $\vee$ ביטא טאו' אז $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta)$ טאו'. (* טאו'.

הדרך הכי נוחה לדוגמאות נגדיות זה לחשוב על דוגמת קצה. נקח את ביטא להיות איזו שהיא טאו'. ברור

שאם כך אז אלפא $\vee$ ביטא הוא טאו'. עכשיו אם ביטא היא טאו' אז גם החלק השני של (*) הוא טאו' אבל

מי אמר שהחלק הראשון חייב להיות טאו'? (יש וגם ולכן שניהם צריכים להיות טאו'). מספיק כעת שנבחר

את אלפא וגאמא להיות סתירות: $\alpha = \delta = \neg p$ (ואז לא רק שלא קיבלנו טאו', אלא קיבלנו ממש

סתירה...).

ב. נגדיר מערכת הוכחה חדשה S עבור תחשיב הפסוקים מעל $\{\rightarrow, \neg\}$:

צריכים אקסיומות:

$$(p) \text{ Gl } p \text{ מ } A$$

$$p, q \text{ Gl } p \rightarrow q$$

$$A \text{ מ } A \rightarrow A$$

למה זה האקסיומות? כי ככה בא לנו.

וכללי' (במקרה זה כללי) ההיסק:

$$\frac{A \quad B}{A \rightarrow B}$$

נרצה להוכיח או להפריך את הדבר הבא:
אם ϕ משפט של S אז ϕ אינו סתירה ב- CPL.

עדיף בזמן מבחן לא לחשוב על דוגמא נגדית אלא להתחיל לנסות להוכיח. אם נתקע נדע גם איזה דוגמא נגדית להביא.

איך נוכיח? כמובן באינדוקציה (כמעט כל פעם שמדובר על מערכת הוכחה עושים ככה).

נניח ש: $\vdash \phi$. תהיה $A_1, \dots, A_n$ סדרת ההוכחה של ϕ . נוכיח באינדוקציה על אורך ההוכחה ש ϕ אינו סתירה.

בסיס: $n=1$ מה האפשרויות? ϕ איזומה (למה? כי סדרת הוכחה מורכבת מסדרת הוכחה? איזומה, הנחות [אין לנו], או מתקבל מכללי היסק [אי אפשר כי אנחנו בראשון]].
אם הוא איזומה יש לנו 3 אפשרויות:

$$\phi = \neg \neg \phi \quad \vdash \quad \phi = \neg \neg \phi \quad \vdash \quad \phi = \neg \neg \phi$$

$$\phi = \neg \neg \phi \quad \vdash \quad \phi = \neg \neg \phi \quad \vdash \quad \phi = \neg \neg \phi$$

$$\phi = A \rightarrow A \quad \vdash \quad \phi = A \rightarrow A \quad \vdash \quad \phi = A \rightarrow A$$

הנחה: נניח את נכונות הטענה לכל $k < n$ ונוכיח עבור n .

המעבר:

- אם A איזומה הראינו קודם (חשוב לציין את זה - מי אמר שבשלב ה- n לא משתמשים באיזומה).

- אם A מתקבל מקודמים על ידי כללי היסק אז יש $i, j < n$ כך ש: $A = A_i \rightarrow A_j$.

לפי הנחת האינדוקציה, A_j לא סתירה ולכן קיימת השמה v כך ש: $v(A_j) = \text{true}$. מזה נובע:

$$v(A_i \rightarrow A_j) = \text{true}$$

הערה חשובה לגבי השאלה הזו: הרבה פעמים מגדירים מערכות הוכחה ושואלים דברים. זה בדרך כלל איך שפתורים את השאלות האלו.

לגבי המבחן - חשוב:

1. נקבל דפים של HFOL ודדוקציה טבעית
2. לא נקבל דף שקילויות - לעבוד עליו (משתמשים בו הרבה)
3. מומלץ לעבור על תרגילי הבית והתרגילים ולהבין הכל.