

לוגיקה למדמ"ח - שיעור 3

כזכור, אנחנו עוסקים בתחשיב הפסוקים. הגדרנו את יחס הנביעה בו, ראינו כמה דרכים איך להראות האם נוסחה נובעת מקבוצה שהנחות (2 ה"רדוקציות" שעשינו) וכו'.

השיעור נציג מה נובע ממה בעזרת מערכת שבה אנו מספקים הוכחה.

נתחיל לדבר על מערכת HPC לתחשיב הפסוקים הקלאסי. זה סוג ההוכחה הפשוט ביותר (לא מבחינת האפקטיביות, אלא מבחינת התיאור).

יש לנו במערכת

- אקסיומות.
- כללי היסק (איך להסיק דברים חדשים מדברים שכבר קיבלנו).
- זה כל מה שיש.

הוכחה זו סדרה של נוסחאות בו כל דבר הוא אקסיומה (או הנחות של הטענה), או נובעת מנוסחאות קודמות בסדרת ההיסק.

בהמשך הקורס נראה מערכות הוכחה יותר מסובכות.

הערה:

כמעט בכל מערכות ההוכחה עבור LPC יש ככל היסק אחד והוא זה שמופיע גם ב-HPC: "מודוס פוננס" - כלל הניתוק (אם הגעת למסקנה ש-A נכון וגם $A \rightarrow B$ נכון, אז B נכון).

אם נראה כמה אקסיומות יש במערכת זו, נראה לכאורה כי יש 10. אך למעשה יש כאן אינסוף אקסיומות.

לדוגמא ב- I1, זו לא נוחסה בשפה שלנו! (כי A ו-B הם משתנים במטא שפה, ומשמעות הביטוי היא *לכל A ו-B מהשפה שלנו). אז I1 זה סימון לאינסוף אקסיומות:

$$\begin{aligned} p_2 &\rightarrow (p_3 \rightarrow p_2) \\ p_2 &\rightarrow (p_2 \rightarrow p_2) \\ p_2 &\rightarrow ((p_2 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(I1 כולל בתוכו אינסוף אקסיומות, לכן נקרא ל- I1 סכימה של אקסיומות) אז יש לנו בסכ"ה 10 סכימות.

ניתן הגדרה עבור מערכת ה- HPC.

מתי נאמר ש- A נובעת מ- T לפי HPC? (הסימון בכל מקרה יהיה $T \vdash_{HPC} A$)

הגדרה א'

הגדרה אינדוקטיבית:

- א. אם $A \in T$ אז $T \vdash_{HPC} A$
- ב. אם A אקסיומה של HPC אז $T \vdash_{HPC} A$
- ג. אם $T \vdash_{HPC} B$ וגם $T \vdash_{HPC} B \rightarrow C$ אז $T \vdash_{HPC} C$

(משמעות ג' היא שקבוצת הדברים היכחים סגורה תחת כלל ההיסק. הערה: אם היו כללי היסק אחרים/נוספים, אז ג' היה משתנה בהתאם)

ההגדרה הזו היא תבנית להגדרת איך משהו נובע ממשו בו במערכת הוכחה (נוכל להחליף את המילה HPC במערכת אחרת, לה יהיו מערכת אקסיומות אחרת, וכללי היסק אחרים [שג' יותאם אליהם]).

מה שהגדרנו פה באופן אינדוקטיבי זה למעשה קבוצת המסקנות (לפי HPC במקרה הזה) של תורה T .

בנוסף, מגדירים ש $T \vdash_{HPC} A$ אם A שייך לקבוצת המסקנות הזאת.

וכעת הגדרה אלטרנטיבית (שמאפשרת לעשות דברים בצורה יותר קונסטרוקטיבית).
הגדרה ב'

תחילה נגדיר מושג של הוכחה ב- HPC:

אז מהי הוכחה ב- HPC מתוך תורה T (תורה = קבוצה של נוסחאות)?
אז תחילה – נזהר! כי בדרך כלל אנחנו מדברים על הוכחה בהוכחה במטה שפה שלנו וכעת אנו מגדירים הוכחה בתוך המערכת.

הוכחה ב- HPC של נוסחא φ מתוך תורה T היא סדרה סופית $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ שבה: $\varphi_n = \varphi$

ולכל i (בין 1 ל- n) מתקיים אחד הדברים הבאים (אחד לפחות, יכולים להתקיים כמה):

1. φ_i הוא חלק מההנחות שלנו ($\varphi_i \in T$).

2. φ_i הוא אקסיומה של HPC.

3. φ_i נובע מאיברים קודמים בסדרה בעזרת כללי ההיסק [כשנעבור למערכת אחרת זה לא ישתנה - זה יהפוך להיות: φ_i נובע מאיברים קודמים בעזרת כללי ההיסק] כלומר יש k, j כן ש: $k, j < i$

$$\varphi_j = \varphi_k \rightarrow \varphi_i$$

אז אחרי שהגדרנו מה זה הוכחה ב-HPC, נגדיר את מה שרצינו:

A נובע מ-T ב-HPC ($T \vdash_{HPC} A$) אם יש הוכחה ב-HPC של A מ-T.

אז הגדרנו נביעה בשתי דרכים שונות לכאורה, אך הן שקולות (אנו לא נוכיח את זה).

כשמגדירים לפי השניה, ניתן לעשות אינדוקציות לפי אורך ההוכחה.

הוכחה לפי הגדרה השניה מאפשרת לעשות דברים יותר קונסטרוקטיבית, ולפי הראשונה בדרכי יותר פשוט אבל היא יותר בשביל להראות שמהו נכון ולא ממש לבנות אותו.

דוגמא 1

נראה ש $p_2 \rightarrow p_2$ ניתן להוכחה ב-HPC, כלומר $\vdash_{HPC} p_2 \rightarrow p_2$.

ניתן להוכחה במה? לא כתוב שם כלום. הכוונה מהקבוצה הריקה.

נעשה זאת על ידי שניתן סדרת הוכחה ל $p_2 \rightarrow p_2$ ב-HPC: [בסוגריים מרובעים רשומה ההצדקה -

אחת משלושת התנאים שאיפשרנו בהגדרת הוכחה].

$$\begin{aligned} 1. & \quad p_2 \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2) \quad [I_1: A=p_2, B=p_2 \rightarrow p_2] \\ 2. & \quad (p_2 \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_2 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_2)) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_2)) \\ & \quad [I_2: A=p_2, B=p_2 \rightarrow p_2, C=p_2] \end{aligned}$$

3. $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)) \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)$	$[MP, 1, 2]$
4. $P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)$	$[I1]$
5. $P_2 \rightarrow P_2$	$[3, 4, MP] (\varphi_3 = \varphi_4 \rightarrow \varphi_5)$

זו סדרת הוכחה באורך 5. הראנו שהטענה נובעת מהקבוצה הריקה.
(נסו לחשוב איך בדיוק חשבו על ההוכחה, למה ניסו להגיע ולמה בחרו להשתמש דווקא באקסיומות האלו)

באותו אופן מראים ש: $\frac{}{HPc} A \rightarrow A$ לכל נוסחה A. אם היינו לוקחים A כלשהו, זה היה הופך לתבנית הוכחה (והיינו מקבלים הוכחה כללית גם עבור P17, P35 וכו')

הערה: יש ספרים שבהם יש באמת רק 10 אקסיומות, כלומר כמו אצלנו רק שבמקום A,B,C יש P1,P2,P3. אבל אצלם יש עוד כלל היסק והוא כלל ההצבה.

שאלה בכיתה: מה הקשר בין $\frac{}{CPL}$ לבין $\frac{}{HPc}$

תשובה: נגלה בעתיד הקרוב ש: $\frac{}{HPc} = \frac{}{CPL}$

את השוויון הזה נוכיח למעשה בשני כיוונים. כל אחד מהם יהיה משפט.
כיוון אחד יקרא משפט התקפות והשני משפט השלמות.

משפט התקפות (Soundness) של HPC

אם $T \vdash_{HPC} \varphi$ אז $T \vdash_{CPL} \varphi$.

זה הכיוון הקל של השיויון של היחסים.
למה זה קל? כי אנחנו יודעים כבר איך לגשת לזה - באינדוקציה!

(נראה לא פורמלית שזה קל לפני ההוכחה):

אם $\varphi \in T$ אז ברור.

אם זה בגלל שהוא אקסיומה - אז צריך לבדוק שכל האקסיומות הן טאוולוגיות ב-CPL.
(עבודה טכנית של טבלאות אמת, או שפשוט אפשר להאמין לאברון)

לגבי מודוס פוננס מעט יותר מסובך, נראה זה במהלך ההוכחה הפורמלית.

לפני ההוכחה, נערוך דיון קצר בשאלה של איך מוכיחים שלכל פסוק φ יש תכונה מסוימת PR (סימון לתכונה כללית, סתם מזהה)

אז בגדול יש לנו 2 סגנונות הוכחה (על פי שתי ההגדרות שלנו לנביעה).
[במערכות עם כללי היסק נוספים, נוכיח גם עבורם]

סגנון א':

מראים 3 דברים:

- לכל איבר של T יש את התכונה PR.
- לכל אקסיומה של HPC יש את התכונה PR.
- (שלב האינדוקציה למעשה) הכלל שמאפשר לנו להרחיב את מאגר הנוסחאות הנכונות הוא כלל ההיסק שלנו - MP, ולכן שלב זה יהיה: אם ל-B יש את התכונה PR ול-B $\rightarrow$ C יש את התכונה PR אז ל-C יש את התכונה PR.

סגנון ב': (מתחייס ישירות להוכחות)

כיוון ש $T \vdash_{HPC} \varphi$ אז יש לו הוכחה $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ ב-HPC מ-T.

עתה מוכיחים באינדוקציה על I (בין 1 ל-n) שלכל i : ל- φ_i יש את התכונה PR.

(בהוכחה בסגנון זה תהיה לנו חלוקה א, ב, ג כי φ_i יכול להיות שם בגלל שלושה תנאים, וכאן רואים כמה ההוכחה הזו היא תכלס בדיוק כמו סגנון א').

נסיים את הדיון כאן. כעת ניישם (משמע נוכיח).

נוכיח את משפט התקפות בסגנון א'.

נניח כי $T \vdash_{HPL} \varphi$ ונוכיח להוכיח כי $T \vdash_{CPL} \varphi$.
את נניח כי $T \vdash_{HPL} \varphi$ ונראה שלפי יש את התכונה ש $T \vdash_{CPL} \varphi$.
א. אם $\varphi \in T$ אז מהגדרת $\vdash_{CPL}$, $T \vdash_{CPL} \varphi$ (כי כל מודל של T הוא בהכרח מודל של כל איבר שלה)

ב. אם φ אקסיומה של HPL אז קל לבדוק (בסה"כ יש רק 10 מקרים) שפי היא טאוטולוגיה, לכן $V(\varphi) = t$ לכל השמה V , בפרט לכל השמה V שהיא מודל של T . ולכן $T \vdash_{CPL} \varphi$.

(הסעיף הזה הוא למעשה רוב ההוכחה, למרות שאנחנו לא ממש עושים אותו מעצלנות)

ג. (שלב המעבר) נניח ש- $T \vdash_{CPL} B$ וגם $T \vdash_{CPL} B \rightarrow C$. (כלומר של- B ול- C יש את התכונה של נביעה מ- T ב- CPL).

יהי V מודל של T . אז $V(B) = t$ וגם $V(B \rightarrow C) = t$ וזה אפשרי רק אם $V(C) = t$. ולכן V מודל של C . זה נכון לכל מודל V של T . ולכן $T \vdash_{CPL} C$.

זו הייתה ההוכחה בסגנון א'. נראה בקצרה את ההוכחה בסגנון ב' (הוכחה מפורטת לפי סגנון ב' נראה עבור משפט קשה יותר בהמשך).

אז נניח $T \vdash_{HPL} \varphi$. כלומר קיימת סדרת הוכחה: $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$.
שלב המעבר של האינדוקציה:

- איבר של T ברור

- אקסיומה של HPL - ברור (טאוטולוגיה)

- קיימים פ"ג ופ"ק שהוא נובע מהם על ידי MP, כלומר: $\varphi_j = \varphi_k \rightarrow \varphi_i$. בגלל שג"ק וק"ק קטנים מא"א אז על פי הנחת האינדוקציה הם נובעים מ- T ב- CPL. וכעת נשאר להוכיח שפי א"א נובע מ- CPL עקב כך.

הניסוח הזה הוא ברור יותר למי שרגיל לאינדוקציה תיכונית. הוא יותר ארוך. בדרך נשתמש בו כשנרצה משהו קונסטרוקטיבי (נניח נרצה שנוכל אחרי זה להוציא ממנו תוכנת מחשב).

וכעת, לכיוון הקשה! (של הוכחת שקילות היחסים)

הוא קשה כי איך שהוא צריך מזה שכל מודל של T הוא מודל של $\mathcal{P}$, צריך למצוא איזו שהיא הוכחה ב-HPC... לכן נלך בדרך עקיפה - בשלילה.

במקום לתת את ההוכחה, יש כלים שמאפשרים להראות שיש הוכחה, והכלי המרכזי הוא:

משפט הדדוקציה של HPC

נזכר במשפט הדדוקציה הסמנטי משיעור שעבר:

$$T, A \vdash_{CPL} B \quad \text{אם} \quad T \vdash_{CPL} A \rightarrow B$$

נזכרנו. עכשיו נחזור לנושא:

משפט הדדוקציה של HPC אומר:

$$T \vdash_{HPC} A \rightarrow B \quad \text{אם} \quad T, A \vdash_{HPC} B$$

לפני שנוכיח אותו נתסכל מה יתן לנו להוכיח אותו. אם לדוגמא אנו מקבלים את השאלה, הוכח כי:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_{HPC} A \rightarrow C$$

אז אנו מסוגלים לעשות זאת בקלות כי נראה (על ידי טבלאות אמת) שזה קורה נובע ב-CPL. (בהנחה שאנו יודעים על שקילות היחסים)

אבל... אם יבקשו מאיתנו למצוא הוכחה אז אנחנו קצת בבעיה... איך משפט הדדוקציה יעזור לנו? אז תחילה את השאלה שקיבלנו נוכל להציג בעזרתנו בצורה שקולה כך:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash_{HPC} C$$

ונוכל מכאן בקלות להראות שזה נכון(בלי להשתמש בשקילות היחסים, זו הוכחה פשוטה ב-HPC). אבל יותר מזה! ההוכחה שלנו של משפט הדדוקציה יאפשר לנו למצוא את ההוכחה! וזאת כיוון שההוכחה היא קונסטרוקטיבית. מיד נראה זאת...

הוכחת משפט הדדוקציה:

כיוון ראשון

נניח ש: $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$ ונראה כי $T, A \vdash_{HPC} B$.

נעשה זאת בגרסה ישירה (נראה הוכחות).

כיוון ש: $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$, אז יש הוכחה $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n = A \rightarrow B$ מ- T ב- HPC .

נקח את הסדרה הזו ונוסיף לה 2 דברים בסוף:

$\varphi_1, \dots, \varphi_n, A, B$

סדרה זו (באורך $n+2$) היא הוכחה של B מתוך $T \cup \{A\}$ ב- HPC .

למה זו הוכחה?

אן האיברים הראשונים הם הוכחה מתוך T , בפרט הוכחה מתוך $T \cup \{A\}$ (יש לבדוק את 3 התנאים כדי לוודא שזה באמת נכון). לגבי A , הוא מתוך T איחוד A . לגבי B , זה לפי MP .

כיוון שני (יותר קשה):

נניח ש $T, A \vdash_{HPC} B$ ונראה כי $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$.

מההנחה ש: $T, A \vdash_{HPC} B$ נובע שיש הוכחה: $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$ ב- HPC מתוך $T \cup \{A\}$.

נרצה כמו קודם, להעביר אותו להוכחה למה שאנחנו מחפשים.

נוכיח באינדוקציה שכל אחד מאיברי הסדרה יש את התכונה: $T \vdash_{HPC} A \rightarrow \varphi_i$ (אינדוקציה על i בין 1 ל- n)

בפרט, עבור $i=n$ נקבל את מה שנרצה (שהוא: $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$).

ושוב, נבדוק מה הצידוק של φ_i א"י להופיע בסדרה (לכאורה אין בסיס, אך זו אינדוקציה שלמה, ולכן הוא מוכל בהוכחת המעבר. מי שלא בטוח שפשוט יראה את הבסיס)

א. במקרה זה, $\varphi_i \in T \cup \{A\}$. נפצל לשני מקרים.

א 1. אם $\varphi_i \in T$ אז אני יודע (וגם אתה!) שהוא יכיח ב- T (כלומר $T \vdash \varphi_i$) אנו מרצה להוכיח כי $T \vdash A \rightarrow \varphi_i$. מה הדבר הכי קל לעשות כאן? אם הייתה לנו אקסיומה כזו: $\varphi_i \rightarrow (A \rightarrow \varphi_i)$.

איזה מזל! יש לנו כזו! ולכן $\varphi_i, \varphi_i \rightarrow (A \rightarrow \varphi_i), A \rightarrow \varphi_i$ זו הוכחה של $A \rightarrow \varphi_i$ מתוך T. (זאת בשימוש באקסיומה T1).

א 2. במקרה זה: $\varphi_i = A$. במקרה זה אנו רוצים להוכיח ש $T \vdash_{HPC} A \rightarrow A$. אם נכניס את $A \rightarrow A$ בתור אקסיומה (ואני יכול, כי זה טאו' ומה ובנינו את HPC בצורה כזו שאני מכניס טאו' כאקסיומות) אז זה יבטיח את העניין. כמו שראינו מתברר שלא צריך את זה כאקסיומה וניתן להוכיח אותה מהאקסיומות האחרות (I1 ו- I2) ולכן אנו לא לוקחים אותו כאקסיומה.

לכל דבר ועניין אנחנו יכולים להתייחס לזה כאקסיומה (אלא אם כן מבקשים במבחן להוכיח את זה מהאקסיומות האחרות).

ב. פ"א א"אקסיומה של HPC. נראה הוכחה מתאימה:

$$\varphi_i, \varphi_i \rightarrow (A \rightarrow \varphi_i), A \rightarrow \varphi_i$$

היא ההוכחה של $A \rightarrow \varphi_i$ מתוך T.

למעשה אותה הוכחה כמו קודם. מה בכל זאת ההבדל? הצידוק. שם הוא היה כי הוא היה שייך ל- T וכאן כי הוא אקסיומה של HPC.

ג. פ"א נובע משניים קודמים, כלומר מפי ג" ופי ק" (כאשר ג" וק" קטנים מא"י) בעזרת MP. כלומר: $\varphi_j = \varphi_k \rightarrow \varphi_i$. לפי הנחת האינדוקציה לגבי ג" וק"י:

$$T \vdash_{HPC} A \rightarrow \varphi_k \quad T \vdash_{HPC} A \rightarrow \varphi_j$$

כלומר:

$$T \vdash_{HPC} A \rightarrow \varphi_k$$

$$T \vdash_{HPC} A \rightarrow (\varphi_k \rightarrow \varphi_i)$$

וכעת להוכחה שאנו מחפשים. אנחנו צריכים משהו שיעזור לעבור משני הדברים שקיבלנו ל: $A \rightarrow \varphi_i$.

ההוכחה:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{הוכחה} \\ \text{הוכחה} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \\
 A \rightarrow \psi_k \\
 \left. \begin{array}{l} \text{הוכחה} \\ \text{הוכחה} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \\
 A \rightarrow (\psi_k \rightarrow \psi_i) \\
 (A \rightarrow (\psi_k \rightarrow \psi_i)) \rightarrow ((A \rightarrow \psi_k) \rightarrow (A \rightarrow \psi_i)) \\
 (A \rightarrow \psi_k) \rightarrow (A \rightarrow \psi_k) \\
 A \rightarrow \psi_k
 \end{array}$$

[תיקון: בשתי השורות האחרונות, פי k באחרון בשתייהן אמור כמובן להיות פי i]
(שרשור ההוכחות עם 3 הדברים שהוספנו).

ניתן כעת הדגמה קצרה של הרעיונות בהוכחה, ונראה את הקונסטרוקטיביות שלה. נזכר, הייתה לנו את הבעיה, למצוא הוכחה עבור:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_{HPC} A \rightarrow C$$

וראינו כי על פי משפט הדדוקציה:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash_{HPC} C$$

כעת, לפי ההוכחה שראינו, אנו יכולים לבנות את ההוכחה. תחילה נראה הוכחה שאנו יכולים לעשות:

$$A, A \rightarrow B, B, B \rightarrow C, C$$

(סה"כ 5 שלבים!)

עכשיו הוכחה לפי הבניה בהוכחה: (במידה והיינו מחשב)

(רגע לפני: בגדול אנו ניצור הוכחה במבנה

$$A \rightarrow A, \dots, A \rightarrow (A \rightarrow B), \dots, A \rightarrow B, \dots, A \rightarrow (B \rightarrow C), \dots, A \rightarrow C$$

כלומר נמלא את ה- ...ים [יש לקרוא "שלוש-נקודות-יים"])

ולהוכחה:

הוכחה מתמלג
השיעור

5. $A \rightarrow A$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ [I1]
7. $A \rightarrow B$ [הנחה]
8. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$
9. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ [I2]
10. $(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ [8, 9, MP]
11. $A \rightarrow B$
12. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ [I1]
13. $B \rightarrow C$ [הנחה]
14. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ [12, 13, MP]
15. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ [I2]
16. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ [14, 15, MP]
17. $A \rightarrow C$ [16, 11, MP]

מיוצר כי $A \rightarrow B$
בהנחה A ו- B צריך
לדאוג לאמת את
המשפט. אכן אנו
מקבלים כעת
כמו משפט לפני
האנל' שהוכחה...

(אכן, מעט כבד)

נגיע כעת להכללה הבאה:
(אחרי התבוננות מה היה מהותי בהוכחה, ואיזה תכונות של HPC השתמשנו בהוכחה)

הכללה: משפט הדדוקציה יהיה נכון (ועם אותה הוכחה בדיוק) לכל מערכת נוסח הילברט עבור שפת תחשיב הפסוקים, המקיימת את התנאים הבאים:

1. MP הוא כלל היסק יחיד של המערכת

2. כל האינסטנסיות של I1 ו-I2 יכוחות במערכת (זאת עשינו למען הדיוק. כלומר לא ביקשנו שיהיו אקסיומות, אלא רק שיהיה ניתן להסיק אותם).

מערכת שמקיימת תנאים אלה שנראה בעתיד (שהיא יותר חלשה, ולא ניתן להוכיח בה את כל הטאו' של CPL), היא מערכת HPI.

המערכת HPI (העתיד כבר כאן!)

(למי שתהיה כל הזמן מה זה השמות הללו:
H – הילברט, P – פרופוזישן, C – קלסיקל / I – אינטואיציוניסטית)

בסה"כ: לוגיקה פסוקית אינטואיציוניסטית.

היא מתקבל מ-HPC על ידי החלפת N2 באקסיומת N2', שאומרת:

$$N2': \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

(כלומר מסתירה נובע כל דבר)

היא יותר חלשה מ-HPC (כנראה בהמשך, כי לא כל טאו' ניתן להוכיח בה) אך משפט הדדוקציה נכון בה) כי הוא מקיים את התנאים שהצבנו קודם.

דוגמא לטאו' שלא ניתן להוכיח ב-HPI: זו היא פשוט N2 (לא הוכחנו אך כבר טענו שהיא יותר חלשה).
לא ניתן גם את $A \vee \neg A$.

עולה השערה במבט ראשון שכל טאו' שמכילה רק את קשר הגרירה (כי השתמשנו ב-I1 ו-I2, שהן אקסיומות גרירה טהורות) ניתן להוכיח באמצעות שתיהן.

התשובה היא לא ונביא לכך דוגמא:

חוק פירס:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

אז כעת עולים 2 תרגילים:
 - להוכיח שזו טאו'.
 - להוכיח שלא ניתן להוכיח זאת ב- HPI.

להוכיח שזו טאו' זה ממש לא בעיה.
 אבל, איך מראים שמשהו לא ניתן להוכחה? זו שאלה הרבה יותר קשה... איך בכלל ניגשים?

דרך אחת - למצוא תכונה שכל מה שניתן להוכיח ב- HPI יש את התכונה הזו ולנוסחא הזו אין את התכונה הזו.
 דרך אחרת - לבנות מודל נגדי. בעתיד נראה מודל כזה.

משפט השלמות של HPC

אם $T \vdash_{HPC} A$ אז $T \vdash_{CPL} A$. (הוכחנו את הכיוון השני קודם)

השאלה שעולה היא איך מתחילים. אז נניח שכל מודל של T הוא גם מודל של A . אבל איך מזה אני מראה הוכחה ל- A מ- T ב- HPC?

נעשה זאת על דרך השלילה:

אנו נראה שאם A לא יכיח מ- T ב- HPC $(T \not\vdash_{HPC} A)$ אז A לא נובע מ- T ב- CPL $(T \not\vdash_{CPL} A)$.
 (כלומר נמצא השמה שהיא מודל של T שהיא לא מודל של A).

אז איך שהוא מהעובדה ש- A לא יכיח מ- T אנו צריכים למצוא השמה מתאימה. בשביל זה צריך לקשר בין השמות לתורה:

נשים לב שכל השמה קובעת תורה - כי היא נותנת ערך אמת לכל נוסחה ונוסחה, ובאופן טבעי היא מגדירה תורה, שנשמנה ב- $T_v(\varphi)$ והיא תהיה קבוצת כל הפסוקים ש- V מספקת אותם:

$$T_v(\varphi) = \{ \varphi \mid v(\varphi) = t \}$$

לפעמים נרצה לעשות את הדבר ההפוך - מתוך תורה לקבל השמה. אז עולה השאלה מה הן התכונות של תורה שממן אני אוכל לראות מה ההשמה שהביאה אליה.

כמו בכל שיעור (חוץ מהאחרון) – בשיעור הבא נמשיך...