

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 5

כמה דברים טכניים:

- שבוע הבא אין שיעור (יום הזיכרון), לכן יהיה שיעור במקום ביום חמישי ב- 8:00. יהיה מייל בנושא.

- אין חובת הגשה ולכן גם לא מפורסמים פתרונות לתרגילים (גם לא לפני המבחן). מי שהגיש ועדיין לא ברור לו משהו מוזמן לבוא לשעת קבלה של המתרגלת לשאול. יתכן שיפורסמו פתרונות נבחרים.

נעסוק התרגול במערכת דדקוציה טבעית. למה היא מועילה ומאיפה היא באה?

בהילברט היה קשה מאוד למצוא הוכחות, ולכן ניסו לפתח מערכות הוכחות שהן יותר אינטואיטיביות, ומערכת דדקוציה טבעית באה לחקות את האופן שבו אנו עושים הוכחות באמת (היא פחות נוקשה מ-HPC).

מה שונה?

- הקטגוריה הסינטקטית. ב-HPC אלו היו נוסחאות, ב-NDC היא סקוונט: $\Gamma \Rightarrow A$, כאשר: Γ - קבוצה סופית של סנוחאות, A - נוסחא. והדרך האינטואיטיבית להסתכל על זה היא כזו: אם כל ההנחות ב- Γ , אז A .

- ב-HPC היו הרבה אקסיומות וכלל היסק אחד. במערכות דדקוציה טבעית המצב הפוך. יש לנו אקסיומה אחת, והמון כללי היסק. מה זה אומר? לכל קשר יש לפחות כלל הכנסה אחד וכלל הוצאה אחד. אם נסלק אחד מהכללים ב-NDC אז להרבה דברים שנראה לנו שבטוח יש להם הוכחה, לא תהיה להם.

סימון: כדי לסמן כלל היסק, נכתוב בסוגריים את הקשר ואז $\vdash$ עבור הכנסה או $\vdash$ עבור סילוק, לדוגמא בסימון $(\vdash)$ הכוונה היא לכלל ההכנסה של "או".

הכללים המעניינים יותר הם כללי ה- NOT. ככל ההוצאה וההכנסה:

$$\frac{(\vdash) \quad \Gamma \Rightarrow A}{A}$$

$$\frac{(\vdash) \quad \Gamma_1 \cup \{A\} \Rightarrow B \quad \Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow A}$$

יש דרכי כתיבה מקוצרות לכללים ולהוכחות, למשל את כלל ההכנסה של "וגם":

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

(פשוט לא לכתוב את ההנחות). ואז זה נראה מאוד אינטואיטיבי (כמובן שחשוב אבל לזכור שזה רק כתיבה מקוצרת וצריך לדעת איזה הנחות עמדו מאחורי כל אחד מהפסוקים).

הוכחה ב-NDC, היא בדיוק כמו הוכחה ב-HPC. מחפשים סדרה שנגמרת במה שרוצים להוכיח.

לגבי חיפוש הוכחות: העבודה מתרכזת בצד ימין של הסקוונט (בצד שמאל, אנו אוספים או נפטרים מהנחות) - רוב העבודה (הכנסה או הוצאה של קשרים וכו') נעשים בצד ימין.

מה צריך להגדיר כעת? את יחס הנסיעה של NDC:

- מה זה אומר שהסקוונט $\Gamma \Rightarrow A$ יכיח ב-NDC (כלומר ש- $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$)? זה אומר שיהיה הוכחה ב-NDC לסקוונט.

- ומה זה אומר שמאיזה שהיא תורה נובע ב-NDC הפסוק A? (כאן אין אפילו סקוונט). זה אומר שיש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש: $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$ (כלומר ש- $\Gamma \Rightarrow A$ יכיח ב-NDC).

תרגיל

נוכיח שאם $T \vdash_{NDC} A$ אז $T \vdash_{CPL} A$.

(זו הוכחת הנאותות / תקפות של המערכת - כל מה שייכיח הוא גם נובע ב-CPL. נאותות = תקפות).

הוכחה

ראשית נראה כי אם $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$ אז $\Gamma \vdash_{CPL} A$. אז זה נוכיח באינדוקציה על מבנה ההוכחה ב-NDC. (זה רק ראשית, אחרי זה נסיים את ההוכחה)

בסיס

כאן יש רק אקסיומה אחת שצריך לעבור עליה. נתסכל על $\vdash_{NDC} \Gamma \vee \{A\} \Rightarrow A$. מרפלקסיביות CPL ברור כי: $\Gamma \vee \{A\} \vdash_{CPL} A$.

מעבר

נעבור על כל אחד מכללי ההיסק. נניח את הנחת האינדוקציה עבור הסקוונטים שבחלקו העליון (למה שמעל הקו) ונוכיח עבור הסקוונט בחלק התחתון. אנו בתרגול נעשה את זה רק עבור (vE). הנחת האינדוקציה:

$$\begin{array}{l} \vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \\ \vdash_{NDC} \Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow C \\ \vdash_{NDC} \Gamma_3 \cup \{B\} \Rightarrow C \end{array}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\begin{array}{l} 1. \Gamma_1 \vdash_{CPL} A \vee B \\ 2. \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash_{CPL} C \\ 3. \Gamma_3 \cup \{B\} \vdash_{CPL} C \end{array}$$

נרצה להראות שזה מתקיים עבור התחתון, כלומר ש: $\Gamma, \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash_{CPL} C$.

זהו כבר הוכחה של CPL: יהיה v מודל של $\Gamma, \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

מ-1, v הוא מודל של $A \vee B$. אז v הוא מודל של A או v הוא מודל של B.

אם v מודל של A אז מ-2 הוא מודל של C. אם v מודל של B אז מ-3 הוא מודל של C.

זהו מה שצריך לעשות עבור כל כללי ההיסק...

נשים לב עדיין לא הוכחנו את מה שרצינו להוכיח בתרגיל (בגלל זה אמרנו קודם "ראשית" - כי מה שרצינו להוכיח זה שאם מ-T הפסוק A יכח ב-NDC, אז מ-T הפסוק A נובע ב-CPL.

נמשיך:

אם $T \vdash_{NDC} A$ אז יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש: $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$.

לפי מה שהוכחנו זה אומר ש- $\Gamma \vdash_{CPL} A$. זה עדיין לא מה שרצינו להוכיח כי אנו רוצים לפי T. נסיים:

לפי מונוטוניות של CPL: $T \vdash_{CPL} A$. וכעת סיימנו.

תרגיל

הוכח ש: $\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

נשתמש ב- (1I) $\frac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B}$ נתחיל עם $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ ונרצה להשתמש ב-

$$(1I) \frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow B \quad \Gamma, \neg B \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow A}$$

אך כדי להפעיל אותו אנחנו חייבים שבהנחות יהיה לפחות אחד משותף (בכלל ההיסק הזה יש את הפסוק A שמשותף לשתי התורות גאמא 1 וגאמא 2) ואין לנו... מה נעשה? נוסיף הנחה! (וזה בסדר, כי האקסיומה מבקשת שייכות לקבוצה אז אין בעיה להוסיף לה הנחות). וכעת ההוכחה:

$$\begin{array}{c} \text{זו ההנחה} \\ \text{שהוספנו - B} \\ \hline \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \wedge B) \quad (1I) \frac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B} \\ \hline \neg(A \wedge B), A \Rightarrow B \quad (\vee I) \\ \hline \neg(A \wedge B), A \Rightarrow \neg A \vee B \quad (\vee E) \\ \hline \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee B \end{array}$$

(נשים לב לשיטת ההוכחה כאן – אנו מסיקים משהו ואז כותבים עוד משהו ליד המסקנה ומסיקים משניהם [לפעמים משלושתם] בגלל זה יש כאן הרבה "קווי שבר" במקומות שונים – בכל מקום שיש הוא מתייחס להנחות מעליו והמסקנה היא מה שמתחתיו [באמצע מתחתיו])

עוד תרגיל

הוכח כי $\vdash_{ND} \Rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

$$\begin{array}{c} \frac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B} (1I) \\ \hline (A \wedge B) \rightarrow C \Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C \quad (\rightarrow E) \\ \hline A, B, (A \wedge B) \rightarrow C \Rightarrow C \quad (\rightarrow I) \\ \hline A, (A \wedge B) \rightarrow C \Rightarrow B \rightarrow C \quad (\rightarrow I) \\ \hline (A \wedge B) \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ \hline \Rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \end{array}$$

הוכחה:

נראה עוד דרך, בה אנו לא כותבים את ההנחות (את צד שמאל של הסקוונט), ונסמן את ההנחות באמצעות המיספור שלמדנו בשיעור:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A]_2 \quad [B]_1}{A \wedge B} (\wedge I) \\
 \frac{[A \wedge B \rightarrow C]_3}{\quad} (\rightarrow E) \\
 \frac{C}{B \rightarrow C} (\rightarrow I_1) \\
 \frac{B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} (\rightarrow I_2) \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))} (\rightarrow I_3)
 \end{array}$$

תרגיל

מערכת NDC מתקבלת מ-NDC ע"י החלפת הכללים: $(\rightarrow I)$, $(\rightarrow E)$ בכללים:

$$\begin{array}{c}
 (N_1') \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A}{\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \Rightarrow B} \quad (N_2') \quad \Gamma \Rightarrow A \vee A
 \end{array}$$

הוכח ש NDC ו-NDC' שקולות.

הוכחה:

נראה כיוון אחד – ש- $(\rightarrow I)$, $(\rightarrow E)$ נגזרים ב-NDC:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \Rightarrow A \quad (N_2') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \vee \{A\} \Rightarrow \boxed{A}} (\rightarrow I) \quad (N_1')}{\Gamma \Rightarrow A} (\vee E) \\
 \frac{(N_2') \quad \frac{\Gamma \vee \Gamma_2 \Rightarrow A \vee A \quad A \Rightarrow A}{\Gamma \vee \Gamma_1 \vee \{A\} \Rightarrow \boxed{A}} (\rightarrow I) \quad (N_1')}{\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \Rightarrow A} (\vee E)
 \end{array}$$

יש לנו ריבועים סביב כמה דברים, כי יכולנו לכתוב בהם מה שנרצה. אז במהלך ההוכחה בכיתה השארנו אותם ריקים, ובסוף חזרנו אליהם לראות מה אנחנו רוצים להכניס אליהם).

התרגיל הקרוב יהיה בעיקר לחפש הוכחות ב-NDC כדי להתרגל למערכת החדשה שלנו.