

לוגיקה למדמ"ח - תרגול 9

נתחיל מלחזור על ההגדרות ה"לא כל כך נעימות" של t -מודל ו- v -מודל ונבין בדיוק מה ההבדלים ביניהם.

ספיקות

- הזוג (M, v) מהווה t -מודל של A אם $M, v \models A$.
- אם ל- A קיים t -מודל נאמר כי A היא t -ספיקה.
- מתי נגיד ש- (M, v) הם t -מודל של איזו שהיא תורה T ? אם הם t -מודל של כל אחת מהנוסחאות בתורה.
- M מהווה v -מודל של A אם $M \models A$.
- אם ל- A קיים v -מודל נאמר כי A היא v -ספיקה.

נביעה

- $T \vdash_{\text{FOL}}^t A$ אם T כל t -מודל של T הוא t -מודל של A .
- $T \vdash_{\text{FOL}}^v A$ אם T כל v -מודל של T הוא v -מודל של A .

מקור האותיות

t בא מהמילה truth, תחת המודל M וההשמה הנוסחא מקבלת t .
 v בא מהמילה valid, כלומר במבנה M הנוסחא תקפה (לכל השמה).

הבחנות:

- $T \vdash^v A \Leftarrow T \vdash^t A$ (זה לא אינטואיטיבי, זה נראה דווקא שהיפך נכון [כמו שראינו בשיעור]. וודאו שברור לכם גם איך מוכיחים את זה מההגדרות [זה ברמה של בדידה]).

- $T \vdash^t A \not\Leftarrow T \vdash^v A$. נתסכל על דוגמא נגדית:

כלל ההכללה. מה הוא אומר? $B \vdash^v \forall x B$. למה זה נכון? נקח v -מודל של B , כלומר מודל שכל

השמה בו מספקת את B , לכן כל השמה במודל זה מספקת את $\forall x B$ (נקח השמה v , וצריך להראות שכל השמה שהיא x -וריאנט שלה מספקת את B . כיוון שכל השמה מספקת את B , בפרט כל השמה שהיא x -וריאנט של v מספקת את B).

אבל זה לא מתקיים: $B \vdash^t \forall x B$. למה? נקח את: $x=0 \vdash^t \forall x (x=0)$. יש מודל והשמה (נגיד טבעיים ו- $x=0$) שמהווים t -מודל של צד שמאל, אבל זה לא t -מודל של צד ימין.

אם נסתכל על: $x=0 \vdash^v \forall x (x=0)$ המבנה היחיד בו לצד שמאל יש איזה שהוא v -מודל הוא

מבנה שיש בו סינגלטון שהוא 0, ומבנה זה הוא גם באמת v-מודל של צד ימין.
אבחנה (עקב הנביעה): t-מודלים יש הרבה, ולכן הנביעה בהם היא חלשה יותר.

תרגיל

הוכח או הפרך:

1. אם T היא v-ספיקה אז T היא t-ספיקה. אינטי' עדיין קשה לראות, בואו פשוט נבדוק.
T היא v-ספיקה ולכן קיים לה v-מודל M, כלומר $M \models T$. בפרט לכל השמה v, $M, v \models T$.
ולכן (M, v) מהווים t-מודל של T. ולכן זה נכון.
2. אם T היא t-ספיקה אז T היא v-ספיקה. אז זה כנראה לא נכון. נביא לכך דוגמא נגדית. (צריך להזהר מדוגמאות שלא עובדות כאשר העולם שלנו הוא סינגלטון – מיד נראה). נסתכל על: $P(x) \wedge \neg P(y)$ (בקלות אפשר לראות שהיא t-ספיקה. מבנה: טבעיים, P - האם זוגי, x ו-y הם 10 ו-7 בהתאמה). אבל בשום מבנה היא לא תהיה תקפה, כי תמיד נוכל להסתכל על ההשמה שתתן ל-x ול-y אותו דבר.

נשים לב:

אין דבר כזה ספקות במבנה, ספקות אומרים בלי מבנה (זה אומר קיים מבנה שבו זה תקף). בתקפות מדברים על מבנה.

דוגמא לא טובה על מנת לסתור את 2: הנוסחה: $X + Z = 5$. היא לא טובה. תחילה, ברור כי היא t-ספיקה. כעת, לכאורה היא טובה כי בטבעיים היא לא תקפה אבל זה מספיק טוב, כי צריך להראות שבכל מבנה שהוא היא לא תקפה. וקיים כזה שהיא תקפה בו, והוא כזה עם הסינגלטון 3. טוב, זה מדויק (כי לא יכול להיות כי יש שם פלוס 2 ואז גם 5 יהיה במבנה. צריך אולי לחשוב על נוסחא דומה או לקחת מבנה בו פלוס מתפרש באופן אחר אבל העיקרון צריך להיות ברור).

תרגיל

יהיה A פסוק. הוכח כי $T \cup \{A\}$ v-ספיקה אם ורק אם $T \not\models A$.

$\Rightarrow$: נניח כי $T \cup \{A\}$ v-ספיקה. כלומר, קיים מבנה המהווה v-מודל לה. לכן $M \models T$ וגם $M \models A$.

ולכן $M \models A$. ולכן מצאנו v-מודל של T שאינו v-מודל של A, כלומר: $T \not\models A$.

$\Rightarrow$: נניח כי $T \not\models A$. לכן קיים v-מודל של T שאינו v-מודל של A. כלומר קיים מבנה M כך ש-

$M \models T$ אבל $M \not\models A$. וכעת נרצה להגיד ש: $M \models A$. אבל לא נוכל להגיד את זה באופן כללי.

בגלל ש-A פסוק אז אפשר להגיד את זה. ולכן M מהווה v-מודל של $T \cup \{A\}$. (ודאו שהבנתם את החלק האחרון – איפה שהשתמשנו בעובדה ש-A הוא פסוק).

למה המעבר האחרון לא נכון בהכרח במקרה הכללי?

$$A = P(x, y) \wedge \exists x \neg P(x, x)$$

נסתכל על:

טענה: גם $\neg A$ וגם A לא v-ספיקה.

A לא v-ספיקה – כלומר אין מבנה שבו הנסוחא הזו תקפה. למה זה נכון? כי אז שניהם (שני הדברים שעושים ביניהם "וגם") צריכים לקבל T . אם ימין מקבל T יש a כזה מה"קיים", אני יכול לתת בהשמה a לכל המשתנים ואז שמאל לא יהיה נכון (ולכן אין תקפות – כי זה לא יהיה נכון לכל השמה)

לגבי $\neg A$, זה אומר ש- $\neg A$ לא תקפה לוגית! נכתוב את זה בצורה שקולה:

$\neg A = \neg P(x, y) \vee \forall x P(x, x)$ כלומר קיים מבנה והשמה שזה מקבלת F (ואפשר למצא אחת כזו, זה לא ממש קשה – מושאר כתרגיל).

תרגיל – כלל הדקוניה

$$T \vdash A \rightarrow B \text{ אם } T \cup \{A\} \vdash B$$

$\Leftarrow$: נניח כי $T \cup \{A\} \vdash B$. יהי (M, v) t-מודל של T (נרצה להראות שהוא גם t-מודל של $A \rightarrow B$)

אם $M, v \not\models A$ אז $M, v \models A \rightarrow B$ ולכן (M, v) הוא t-מודל של $A \rightarrow B$ (כלומר $M, v \models A \rightarrow B$).

אם $M, v \models A$ אז מההנחה $M, v \models B$ ולכן $M, v \models A \rightarrow B$.

לכן (M, v) הוא t-מודל של $A \rightarrow B$.

$\Rightarrow$: נניח כי $T \vdash A \rightarrow B$. יהיה (M, v) t-מודל של $T \cup \{A\}$. זה אומר ש- $M, v \models T$ וגם

$M, v \models A$. הראשון אומר מההנחה: $M, v \models A \rightarrow B$. ומזה ומהשני נקבל: $M, v \models B$.

האם זה מתקיים ב-v-נביעה? לא.

נקח את אותה הדוגמא מההתחלה (מעט נשנה אותה)

מצד אחד: $x=0 \vdash \forall x \forall y (x=y)$ (למה? כי v-מודל של צד שמאל זה רק מבנים שהם סינגלטון עם 0, ואז צד ימין יקבל בהם T).

מצד שני, הנסוחא הזו: $\neg x=0 \rightarrow \forall x \forall y (x=y)$ לא תקפה לוגית (נקח השמה שנותנת $x=0$ עם

תחום שיש בו עוד משהו חוץ מ-0). ולכן זה לא מתקיים עבור v-נביעה. (נשים לב שלצד שמאל יש מודל - הכל מודל שלו! ולכן צריך שהכל יהיה מודל של צד שמאל, כלומר שיהיה תקף לוגית – וזה הראנו שלא נכון).

ועכשיו קצת סינטקס.

הצבה של שם עצם במקום משתנה חופשי

הצבה מסמנים כך: של t במקום x בש"ע - $\{ \frac{t}{x} \}$, או בנוסחא - $A \{ \frac{t}{x} \}$.

כעת נגדיר את ההצבה (בצורה אינדוקטיבית כמובן, עבור ש"ע ועבור נוסחאות)

בש"ע:

- במשתנים: $y \{ \frac{t}{x} \}$ אז זה אומר: $y \{ \frac{t}{x} \} = \begin{cases} t & y=x \\ y & y \neq x \end{cases}$

- בקבועים: $c \{ \frac{t}{x} \} = c$

- להרחבה (ע"י שימוש בפונ'): $F(s_1, \dots, s_n) \{ \frac{t}{x} \} = F(s_1 \{ \frac{t}{x} \}, \dots, s_n \{ \frac{t}{x} \})$

בנוסחאות:

- נוסחא אטומית: $\rho(s_1, \dots, s_n) \{ \frac{t}{x} \} = \rho(s_1 \{ \frac{t}{x} \}, \dots, s_n \{ \frac{t}{x} \})$

- הרחבה:

$$(\neg B) \{ \frac{t}{x} \} = \neg (B \{ \frac{t}{x} \})$$

$$(A \circ B) \{ \frac{t}{x} \} = A \{ \frac{t}{x} \} \circ B \{ \frac{t}{x} \}$$

$$(\forall y A) \{ \frac{t}{x} \} = \begin{cases} \forall y A & y=x \\ \forall y (A \{ \frac{t}{y} \}) & y \neq x \end{cases} \quad \leftarrow \text{לא מציבים במקום משתנים קושרים}$$

דוגמא

נסמן: $t = g(y)$. כעת:

- אם $A = \forall x (p(x) \rightarrow q(x, y))$ אז $A \{ \frac{t}{x} \} = A$

- אם $A = p(x) \rightarrow \forall x (q(x, y))$ אז $A \{ \frac{t}{x} \} = p(g(y)) \rightarrow \forall x (q(x, y))$

$$A\{\frac{t}{x}\} = \forall y (q(y) \rightarrow \exists x q(x, y)) \quad \text{אם} \quad A = \forall y (q(x) \rightarrow \exists x q(x, y))$$

לגבי האחרון, לפי ההגדרה שלנו אפשרי שההצבה שלנו תקשור דברים (מסומן ב-), אבל אנחנו לא נרצה שההצבה שלנו תעשה את זה - ולכן הצבות כאלו כ"לא חוקיות".

משפט ההחלפה עבור ש"ע

יהיו t, s_1, s_2 ש"ע. x משתנה.

$$V[t\{\frac{s_1}{x}\}] = V[t\{\frac{s_2}{x}\}] \quad \text{אם} \quad V[s_1] = V[s_2]$$

הוכחה:

על מבנה t (לא מבנה s_1 או s_2). מקרים:

$$- \quad t = c \quad \text{או} \quad t = y \neq x$$

$$V[t\{\frac{s_1}{x}\}] = V[t] = V[t\{\frac{s_2}{x}\}]$$

$$- \quad t = x$$

$$V[t\{\frac{s_1}{x}\}] = V[s_1] = V[s_2] = V[t\{\frac{s_2}{x}\}]$$

מבנה

$$- \quad t = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$\begin{aligned} V[f(t_1, \dots, t_n)\{\frac{s_1}{x}\}] &= V[f(t_1\{\frac{s_1}{x}\}, \dots, t_n\{\frac{s_1}{x}\})] = \\ &= I[f][V[t_1\{\frac{s_1}{x}\}], \dots, V[t_n\{\frac{s_1}{x}\}]] = \\ &= I[f][V[t_1\{\frac{s_2}{x}\}], \dots, V[t_n\{\frac{s_2}{x}\}]] = \\ &= V[f(t_1, \dots, t_n)\{\frac{s_2}{x}\}] \end{aligned}$$

הצבה
חדשה

מבנה
חדש

$$\begin{aligned} &= I[f][V[t_1\{\frac{s_2}{x}\}], \dots, V[t_n\{\frac{s_2}{x}\}]] = \\ &= V[f(t_1, \dots, t_n)\{\frac{s_2}{x}\}] \end{aligned}$$

מבנה
חדש

יש משפט החלפה גם עבור נוסחאות, שאותו אנחנו נעשה בתרגיל.

יש עוד תרגיל מאוד חשוב שלא הספקנו, והוא יפורסם באתר. חשוב לקרוא אותו.