

לוגיקה למדמ"ח – שיעור 5

נתחיל שוב עם מה שעשינו ממש בסוף השיעור הקודם.

התחלנו לדבר על דדוקציה טבעית, ואנו מתחילים איתו כי תחשיבי הילברט זה טוב בשביל דברים תיאורטיים, אך זו לא הצורה שבה אנו באמת מוכיחים דברים בספרים וטקסטים מתמטיים. (ויש קשר בין מה שאנו עושים בלוגיקה לבין הוכחות מתמטיות).

השם טבעית מגיע מכיוון שכך אנו באמת עובדים עם הדברים.

נחזור לדוגמא שראינו, שהוכחנו בקורס בדידה את הטענה הבאה:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

והראינו זאת על ידי כך שהראינו כי:

$$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

ואז חילקנו למקרים וראינו שבכולם זה נובע.

נכתוב כעת את ההוכחה בצורה מופרטת, (אך כדי לקצר במקום לכתוב $x \in K$ נכתוב K , כאשר K קבוצה).
אז אנו רוצים להראות:

$$A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

אז נניח את צד שמאל. וההוכחה:

$$\begin{array}{ll} 1. & A \wedge (B \vee C) \quad \text{(הנחה)} \\ 2. & A \\ 3. & B \vee C \\ 4. & B \quad \text{(נניח כי)} \\ 5. & A \wedge B \\ 6. & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{array}$$

7.	C	(נ"ח כ:)
8.	$A \wedge C$	
9.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
10.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(א"כ ג-2 המקריב:)
11.	$A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(א"כ ג-3:)

ב- 4 ו- 7 בדקנו את שני המקרים עבור $B \vee C$.

בשיעור שעבר שאלנו למה כתוב מה שכתוב ב- 6 כתוב שלוש פעמים! ובאמת בספרים שנקרא הוכחות דברים יהיו כתובים הרבה פעמים.

ולמה ב- 9 ו- 10 כתוב אותו דבר?

ההבדל הוא מה הן ההנחות שיש ברקע בזמן כתיבת כל שורה.

אז מה שקורה בטקסטים מתמטיים זה שבכל רגע אנו זוכרים על מה אנחנו מסתמכים (ולפעמים לא ממש זוכרים וזה גורם לטעויות).

אז כעת נוסיף ליד כל שורה איזה הנחות אנו מניחים עבורן:

1.	$A \wedge (B \vee C)$	(הנחה:)	$\{A \wedge (B \vee C)\}$
2.	A		$\{A \wedge (B \vee C)\}$
3.	$B \vee C$		$\{A \wedge (B \vee C)\}$
4.	B	(נ"ח כ:)	$\{B\}$
5.	$A \wedge B$		$\{A \wedge (B \vee C), B\}$
6.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$		$\{A \wedge (B \vee C), B\}$
7.	C	(נ"ח כ:)	$\{C\}$
8.	$A \wedge C$		$\{A \wedge (B \vee C), C\}$

$$\begin{array}{ll}
 9. & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad | \{A \wedge (B \vee C), C\} \\
 10. & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\text{אכן כ-2 המקרים:}) \quad | \{A \wedge (B \vee C)\} \\
 11. & A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\text{אספסוף:}) \quad | \emptyset
 \end{array}$$

שורה 10 זה איפה שבאה הטקסט: "הראינו שבשני המקרים... ולכן הטענה נכונה" ונשים לב להנחות שבו יש בניגוד לשורות 6 ו-9 (שהן הנחות זמניות, שסיימו את תפקידן כבר בזמן ההוכחה).

נשים לב לקבוצת ההנחות עבור שורה 11. (הרי איך מוכיחין כי A גורר B [כ"אמת מוחלטת" ללא הנחות]? מניחים A, מוכיחים B)

אז אנו מסוגלים לזכור מה ההנחות ברקע. אבל אם נרצה לכתוב תוכנית מחשב שעושה דברים כאלה, היא תצטרך לזכור לא רק את הטענה הנוכחית אלא גם את ההנחות ברקע.

כעת נגדיק מערכת פורמלית שתאפשר לנו לעשות הוכחות כמו שאנו באמת עושים, באמצעות דדוקציה טבעית.

מה שאנו צריכים להוסיף את ההנחות שרקע של כל טענה. הדרך הנוחה לעשות את זה, זה לטפל במבנה נתונים שמכיל את כל האינפורמציה הרלוונטית. אז אנו נכניס מבנה נתונים חדש ששמו יהיה: **סקוונט - sequent - תולדה**.

(אנו כרגע מדברים על סקוונט ברמה של תחשיב הפסוקים, בהמשך נדבר על תחשיב הפרדיקטים ושם הסקוונט יהיה משהו שונה)

הוא יהיה משהו מהצורה:

$$\Gamma \Rightarrow A$$

כאשר:

- A – פסוק.
- gamma - קבוצה סופית של נוסחאות. (נזכר שעדיין אין לנו הבדל בין פסוק לנוסחא)
- החץ הכפול - סימבול חדש. (זה אינו קשר של תחשיב הפסוקים, הוא לא לוקח שתי נוסחאות ומחזיר נוסחא חדשה!)

נשים לב שלא יכול להיות דבר כזה: (העיגול מסמל "משהו")

$$0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$$

כי זה סקוונט ולא נוסחא! $(0 \Rightarrow 0)$

וכעת הוכחה תהיה סדרה של סקוונטים במקום סדרה של נוסחאות.

כעת נסתכל בדף של "דדוקציה טבעית - תחשיב הפסוקים".
בניגוד לתחשיב הילברט, בדדוקציה טבעית יש לנו מעט אקסיומות והרבה כללי היסק.

האקסיומות שלנו (אחת, שכתובה מעט שונה מזו שבדף):

$$A \in \Gamma \quad \text{כאשר} \quad \Gamma \Rightarrow A$$

יש קשר הדוק בין האקסיומות של הילברט לכללי ההיסק כאן, אותו אנו נראה בעתיד.

כלל היסק לדוגמא:

יש אחד (בקלות תוכלו לזהות אותו) שמשמעותו היא שאם A נובע מ- $G1$ ו- B נובע מ- $G2$, אז אם נאחד את $G1$ ואת $G2$, נוכל להסיק מכך את $A \wedge B$.

חלוקת ההיסקים

בעמודה השמאלית יש לנו כללי הכנסה - איך להוכיח דברים בסגנון של $A \vee B$ כאשר יש לנו את A ו- B.

בעמודה בצד ימין יש לנו כללי סילוק - איך להשתמש בידע מהצורה $A \vee B$. הם כללים פשוטים בדר"כ כמו שמ- $A \wedge B$ אפשר להסיק את A ואת B. המסובך ביותר זה איך להשתמש ב- $A \vee B$ - ודוגמא לשימוש בו (לא פורמלית, כי עוד לא הגדרנו אז סקוונטים) ראינו בדוגמא של ההוכחה הבדידתית (להראות לכל אחד בנפרד).

אז ההוכחה בדדוקציה טבעית זו סדרה של סקוונטים, אך אנו רוצים להוכיח נוסחאות מנוסחאות. מיד נראה איך לעשות זאת. (כשנגדיר את יחס הנביעה, שהוא בין קבוצה של נוסחאות לנוסחא)

למערכת שאנו מדברים עליה כעת נקרא NDC (ראשי התיבות: ND = Natural Deduction, C = Classical).
יש גם את המערכת NDI (כאשר I זה לאינטואיציוניסטים).
ההבדל ביניהן הוא שבאינ' אנו מחליפים את הכלל האחרון של הגרירה (כלל סילוק) הזה:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A}$$

בכלל:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$$

הגדרת נביעה

נאמר ש- $\Gamma \vdash_{NDC} A$ אם קיימת סופית כך שהסקוונט $\Gamma \Rightarrow A$ יכח ב- NDC,

כלומר: $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$ (שזה לא אותו יחס בדיוק [למרות אותו סימון]) כי כאן בצד ימין יש סקוונט

ובקודם יש נוסחא! אבל מכיוון שאין הרבה חשש שמישהו יתבלבל נשתמש באותו סימון).

הסימן $\vdash_{NDC}$ אינו חלק מהתחשיב אך $\Rightarrow$ הוא כן.

הסימון $\vdash_{NDC}$ מסמן יחס נביעה, אך יתכן שאיננו כזה ולא יהיה בסדר להגדיר אותו ככה. ולכן טענה:

הם יחסי נסיעה.

כמו כך בהמשך נראה ש- $\vdash_{NDC}$ הוא בדיוק אותו יחס כמו $\vdash_{HPC}$, ו- $\vdash_{NPI}$ הוא $\vdash_{HPI}$.

מתווה ההוכחה שהיחס שהגדרנו הוא יחס נביעה (ההוכחה המלאה - כתרגיל):

א. אם $A \in T$ אז $T \vdash_{NDC} A$ - זה טריוויאלי כי $\{A\} \Rightarrow A$ אקסיומה.

ב. מונוטוניות: צריך להוכיח שאם $T \vdash_{NDC} A$ ו- $T \subseteq S$ אז $S \vdash_{NDC} A$. גם כן טריוויאלי מההגדרה.

תרגיל שקשור אבל לא נחוץ: אם $\Gamma \subseteq \Delta$ ו- $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$

סופית אז $\vdash_{NDC} \Delta \Rightarrow A$. אז את זה כמובן אפשר להכיח באינדוקציה

- אבל על מה? על מבנה ההוכחה ב- INDC ! הוכחה ב- NDC הוגדרה באופן אינדוקטיבי (סדרה שבה כל אחד הוא אקסיומה או נובע מקודמים על ידי כלל היסק).

ג. טרינדיטיביות: צ"ל שאם $T \vdash_{NDC} A$ וגם $T \cup \{A\} \vdash_{NDC} B$ אז $T \vdash_{NDC} B$.

למעשה נוכיח שאם יש $\Gamma_1 \subseteq T$ סופית ו- $\Gamma_2 \subseteq T \cup \{A\}$ סופית כך ש-

ו- $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow A$ אז, $\vdash_{NDC} \Gamma_2 \Rightarrow B$.

$$\vdash_{NDC} \underbrace{\Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{A\})}_{\Gamma_T} \Rightarrow B$$

ולכן:

ניסוח שקול: אם יש $\Gamma_2, \Gamma_1 \subseteq \Delta$ סופיות כך ש- $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow A$ -

אז $\vdash_{NDC} \Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow B$.

הקשר בין גאמא 2 ל- גאמא 2': $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cup \{A\}$.

איך מוכיחים את הדבר הזה? ("נעשה את זה בשיטה האהובה עליי ביותר") - נשאיר את זה לנו כתרגיל.

הדרכה: אז את זה מוכיחים באינדוקציה על מבנה ההוכחה של $\Gamma_2' \cup \{A\} \Rightarrow B$.

זה תרגיל טוב של הוכחה על מבנה ההוכחה.

בהוכחה של זה אנו נראה למה אנחנו צריכים לעשות את התרגילון שהבאנו קודם (הוקף בריבוע). אז נוכיח את התרגילון הזה:

אז נוכיח שאם $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$, - $\Delta \geq \Gamma$ סופית, אז גם $\vdash_{NDC} \Delta \Rightarrow A$.
הוכחה:

באינדוקציה על מבנה ההוכחה ב- NDC של $\Gamma \Rightarrow A$.

בסיס: אם $\Gamma \Rightarrow A$ אקסיומה של NDC אז $A \in \Gamma$. כיוון ש- $\Gamma \subseteq \Delta$ אז $A \in \Delta$ לכן $\Delta \Rightarrow A$ אקסיומה של NDC ולכן $\vdash_{NDC} \Delta \Rightarrow A$.

מעבר: מתחלק לעשרה מקרים. אנו נעשה אחד מהם - המקרה שנעשה הוא כש- $\Gamma \Rightarrow A$ הוסק בעזרת

כלל ההכנסה של $\wedge$. במקרה זה $A = B \wedge C$ - $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ כאשר $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow B$.
- $\vdash_{NDC} \Gamma_2 \Rightarrow C$.

לפי הנחת האינדוקציה עבור $\Gamma_1 \Rightarrow B$ ו- $\Gamma_2 \Rightarrow C$:

(כי $\Gamma_1 \subseteq \Delta$) - $\vdash_{NDC} \Delta \Rightarrow B$. ולכן לפי כלל ההכנסה של $\wedge$ -

$$\vdash_{NPL} \Delta \Rightarrow A$$

כלומר:

$$\vdash_{NDC} \Delta \vee \Delta \Rightarrow B \wedge C$$

רגע של פילוסופיה! (על שימוש בכללי ההיסק של NDC)

איך מוכיחים גרירה? נשתמש בכלל ההכנסה של גרירה! (שורה שלישית משמאל)

איך משתמשים בגרירה? נשתמש בכלל הסילוק של גרירה! (שורה שלישית מימין)

אז שורות זה לפי קשרים, העמודות לפי סוג הכלל (הכנסה - איך מוכיחים משהו מהצורה..., או סילוק - איך משתמשים בידע מהצורה...).

חזרה להוכחה: באותו אופן עושים את זה עבור 9 המקרים האחרים.

כמעט כל דבר שנוכיח על NDC כעת נוכיח אותו באמצעות אינדוקציה על מבנה ההוכחה ב-NDC.

כעת נברר מה הקשר בין השלישייה (למעשה את הקשר בין שני השמאליים אנחנו כבר יודעים...):

$$\vdash_{CPL} \quad \vdash_{HPL} \quad \vdash_{NDC}$$

$$\vdash_{NDC}$$

משפט התקפות של

$$T \vdash_{CPL} A$$

אז

$$T \vdash_{NDC} A$$

אם

הוכחה

$$\vdash_{NPL} \Gamma \Rightarrow A$$

סופית כך ש:

$$\Gamma \subseteq T$$

אז יש

$$T \vdash_{NDC} A$$

נניח

$$T \vdash_{CPL} A$$

אז

$$\Gamma \subseteq T$$

וכיוון ש-

$$\Gamma \vdash_{CPL} A$$

נראה באינדוקציה על מבנה ההוכחה ש:

בסיס:

נניח $\Gamma \Rightarrow A$ אקסיומה של NDC אז $A \in \Gamma$ ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A$.

מעבר:

מתחלק לעשרה מקרים, אנו נעשה רק אחד מהם, את הארוך ביותר - הכלל הסילוק של "או" ($\vee$). איפה נחפש אותו? בשורה של ה"או" (רביעית) ועמודה של סילוק (ימין). או שפשוט נסתכל על הדף ונחפש את זה שנראה הכי ארוך ומפחיד.

אז נניח ש: (ל.ה.א.)

$$\Gamma_1 \vdash_{CPL} A \vee B, \{A\} \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} C, \{B\} \cup \Gamma_3 \vdash_{CPL} C$$

ונראה ש: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash_{CPL} C$.

תהי v מודל של $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. אז v מודל גם של Γ_1 ולכן גם של $A \vee B$. v מודל של Γ_2

וגם של Γ_3 . כיוון ש- v מודל של $A \vee B$ אז $v(A \vee B) = t$ ולכן $v(A) = t$ או $v(B) = t$, כלומר $v \models A$ או $v \models B$.

אם $v \models A$ אז v מודל של $\Gamma_2 \cup \{A\}$ ולכן v מודל של C (כי $\Gamma_2 \cup \{A\} \vdash_{CPL} C$).

אם $v \models B$ אז v מודל של $\Gamma_3 \cup \{B\}$ ולכן $v \models C$.

בכל מקרה הראינו ש- v מודל של C . מ.ש.ל.

משהו חביב שכדאי לשים אליו לב

נשים לב שהוכחנו את זה כמו שמוכיחים במתמטיקה, השתמשנו בדודקציה טבעית - במהלך ההוכחה הפרדנו לשני מקרים. למעשה בהוכחה עצמה השתמשנו בכלל שאותו אנו מוכיחים...

מה עם הכיוון ההפוך? הוא גם נכון!

כמובן שלהוכיח את משפט השלמות של NDC יותר קשה להוכיח. אנו לא נוכיח את זה ישירות.

משפט השלמות של NDC

$$TH_{NDC} A \text{ אז } TH_{CPL} A \text{ אם}$$

זה ינבע המשפט הבא:

$$I_{NDC} = I_{HPC}$$

ומכיוון שבשניהם מדובר על הוכחות, אנו מצפים לראות דרך (אלגוריתם) למעבר בין ההוכחות ביניהם.

יותר קל לנו להוכיח את השקילות בין שני הדברים הסינטקטיים (שניהם מדברים על הוכחה) מאשר ההוכחה בין משהו סינטקטי למשהו סמנטי (שאת זה עשינו בשיעור שעבר כאשר הוכחנו את השקילות בין HPC ל-CPL).

אז לפני שנוכיח את השוויון (דבר שכנראה ידחה לשיעור הבאה), נראה קודם כמה דברים מעשיים של דדקוציה טבעית - NDC.

מקורות להרחבה

"לוגיקה" - אלכס בלום (כל הספר דדוקציה טבעית). לא מאוד מומלץ - "הוא עושה בשני כרכים פחות ממה שאנחנו עושים בשיעור אחד"

"מתמטיקה בדידה" - לא נפרט מי כתב אותו, יש שם פרט "כיצד מוכיחין" והוא מודקש לדדוקציה טבעית (כולל תחשיב הפרדיקטים)

Van Daalen – ספר שלו בנושא.

אז איך כותבים הוכחות בדדקוציה טבעית? אנו למדים שהיא משתמשת בסקוונטים ואחת השיטות היא פשוט לכתוב סדרה של סקוונטים לכתוב מה נובע ממה.

עוד דרך שאפשר לעשות זאת זה באמצעות עץ (דף חולק בשיעור שמראה את הרעיון – דף ראשון). העצים האלו צומחים כלפי מעלה. בעלים יש את האקסיומות, והשינויים קורים מצד ימין של יחס הסקוונט (הכנסות והפרדות שלהם).

היתרון של הכתיבה הזו - הבדיקה היא מאוד קלה (כי היא מקומית, אני בודק כל קודקוד בעץ האם הוא נובע או לא [ואז ההוכחה לא נכונה] מאלה שמעליו). החסרון - כותבים הרבה דברים, הרבה חזרות (לא חסכוני ודי מעצבן לכתוב הרבה).

בספר של Van Daalen הוא בכלל לא מביא את זה אלא רק את הצורה שאנו רואים מהצד השני של הדף (הדף השני בסריקת הפדף), בה אנו כותבים רק את צד ימין של הסקוונט (כלומר "מאבדים" את המידע על איזה הנחות הוא מסתמך, ועל מנת למצוא אותם עלינו לטפס במעלה העץ). הבעיה היא שכאשר חלק מההנחות מסולקות בדרך, לא ניתן לראות את זה, ועלינו למצוא איזה שהיא דרך לדעת איזה הנחות סולקו. אפשר פשוט למחוק אותה מהעץ בזמן ההוכחה ואז אלה שלא נמחקו עדיין עליהם הנוסחא הנכתבת מסתמכת.

זה טוב כאשר אנו מוכיחים בעצמנו, אבל בבדיקה של ההוכחה אנו פשוט רואים דברים מחוקים ולא יודעים

באיזה שלב הוא נמחק.

שיטת ביניים היא, מיספור העלים (לתת להם תוויות) ויש מספרים צמודים בהמשך - אלה המקומות שבהן ההנחות סולקו.

ואז כדי לדעת מה ההנחות עליהם נוסחא מסתמכת - הם העלים שמעליו בעץ שמספר שלהם לא חזר בעץ (כי המשמעות של זה היא שהם נמחקו)
זו צורה הרבה יותר חסכונית (אפשר להשתמש במצביעים כדי לדעת מי מסתמך על מה) - וזה הצורה שזה נמצא ברוב הספרים.

למעשה הדף השני בפדפ הוא השיטה האחרונה ולא השיטה של Van Daalen.

צורת עץ זו טוב רק להוכחות קצרות - בהוכחות ארוכות זה לא יכנס לדף (ולא לשני דפים...) ואז חוזרים למה שהתחלנו איתנו היום, כתיבת לינארית, סקוונט לאחר סקטוונט [או שתי עמודות, נוסחא וההנחות שעומדות מאחוריה] (ואפשר אפילו להוסיף עוד עמודה שבה יהיה רשום מאיזה שורות קודמות זה הוסק ועל ידי איזה כלל - בהמשך השיעור יש דוגמא לכך).

סימונים

הכנסה של "גם": $(\Rightarrow \wedge)$

סילוק גם "גם": $(\wedge \Rightarrow)$

אז יש סכנה בזה שיש כמה צורות להוכיח כי עלולים לעשות סלט. צריך להחליט באיזה שיטה רוצים לעבוד ולעבוד רק איתה. הכי קל להתחיל עם עצי הסקוונטים (כלומר שיטת העץ הראשונה, זו שמופיעה בדף הראשון בפדפ), זה אמנם ארוך אבל טוב להתחלה.

לפני שנחזור לתיאוריה נעשה מספר דוגמאות להוכחות.

דוגמא

נוכיח ש:

$$(I2) \nmid \vdash_{NPC} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

כלומר נוכיח את הסקוונט (משמאל לא כתוב כלום, הכוונה לקבוצה הריקה):

$$\Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

נשתמש מספר פעמים בכלל הכנסה של גרירה (בצורה הפוכה, כלומר מה מספיק שנוכיח):

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ & A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ & A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow C \\ & A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \Rightarrow C \end{aligned}$$

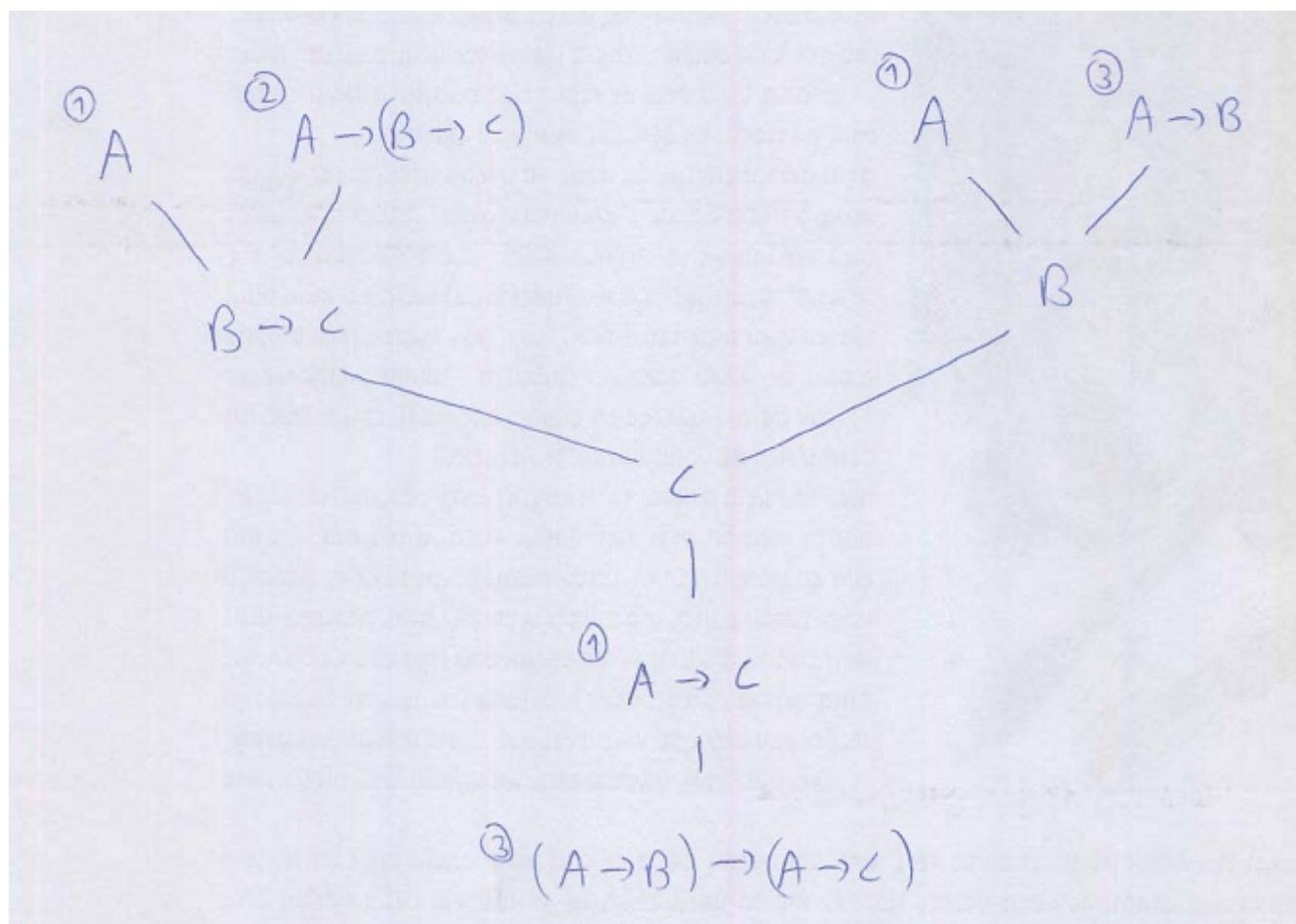
(נשים לב שהשמטנו את הסוגריים המסולסלים שמסמנים קבוצה מהצד השמאלי של הסקוונט) מה שעשינו כאן זה לא משפט הדדוקציה למרות שהפעולה דומה – אלא השתמשנו באחד מכללי ההיסק של מהמערכת (כלל הכנסה של גרירה).

אז עד כאן, את תחילת ההוכחה (4 שורות) כתבנו בצורה לינארית. נוכיח הסקוונט האחרון באמצעות עץ (נשים לב שפה אנחנו לא עושים סלט, אלא מוכיחים חלק מההוכחה בדרך אחרת ולא משלבים את שתי הדרכים):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A \Rightarrow A & A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) \end{array} \\ \swarrow \quad \searrow \\ A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C \\ \swarrow \\ A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \Rightarrow C \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A \Rightarrow A & A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A, A \rightarrow B \Rightarrow B \\ \swarrow \\ A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \Rightarrow C \end{array}$$

ובצורה השניה של העץ (בה אנו מעיפים את החץ הכפול ומה שכתוב משמאלו):

[קצת ארוך אז עמוד הבא..]



ויש כמובן עוד את הדרך הלינארית.

היה יחסית קל להוכיח את זה. ההוכחה הזו תקפה גם ב-NDI.

אבחנה: אם משהו הוא קל להוכחה אז הוא כנראה נכון גם בלוגיקה אינטואיציוניסטית. אם משהו הוא קשה להוכחה, הוא כנראה לא תקף אינטואיציוניסטית אלא רק בקלאסית.

כעת נוכיח את הסווקנט הבא:

$$\Rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

(מישהו זוכר מאיפה הוא? נתקלנו בו כבר בעבר...)

כלומר נוכיח: (שוב, כלל ההכנסה של גרירה הפוך)

$$(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A$$

ואז ההוכחה כמובן תהיה מהצורה:

Handwritten mathematical proof showing the derivation of A from $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ using natural deduction rules. The proof consists of two lines: the first line is $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ with the label "נניח" (Assume) to its right, and the second line is A with the label "וכן" (And) to its right. Three vertical dots are placed between the two lines, indicating a derivation.

אבל מה בא במקום הנקודות? בלי הדרכה נוספת זה הוא תרגיל קשה...

וכעת נראה את ההבדל בין NDC ל-NDI.

אם נלך חזרה לטבלת כללי ההיסק של NDC, נראה כי הכללים של גרירה, "גם" ו"או" משתמשים בקשר רק פעם אחת (בכל כלל היסק, הקשר מופיע פעם אחת בלבד)

בכללי השלילה קורים דברים מוזרים - באיך להוכיח ש "לא A" קשר השלילה מופיע פעמיים - גם למעלה וגם למטה.

את הארבעה למטה ניתן להוכיח מעשרה למעלה, ופרט למקרה בו אנו נדרשים להוכיח אותם, אנחנו יכולים להשתמש בהם (אפשר להתייחס אליהם כלמות).

מתוך 4 כללי השלילה האלה, חוק השלישי הנמנע: $\Gamma \Rightarrow A \vee A$, לא תקף בלוגיקה האינטואיציוניסטית, והשאר כן.

נחזור כעת לתרגיל ממקודם, בו נתקענו, והבנו שהוא כנראה תקף רק הלוגיקה הקלאסאית, וכעת ניגע בהבדל שמקורו בקשר השלילה.

אז למרות שקשר השלילה לא מופיע בנוסחא, אנחנו עדיין נשתמש בו בהוכחה!

כלומר אנו נוכיח זאת בשלילה!

הבהרה

- עשרת הכללים העליונים מהווים את כללי ההיסק למערכת NDC. מהם ניתן להסיק את ה- 4 שבתחתית הדף.
- עשרת הכללים העליונים, כאשר מחליפים את הכלל הסילוק של NOT (זה שאומר שמ-לא A נובע A) בכלל שמ-לא A ו- A נובע B, מהווים את כללי ההיסק למערכת NDI. מהם ניתן להסיק 3 שבתחתית הדף (כלומר את כל הארבעה חוץ מחוק השלישי נמנע).

אז נוסיף למאגר ההנחות שלנו את לא A. מה יקרה אם נגיע לסתירה? באמצעות כלל ההכנסה של קשר השלילה (שורה ראשונה בקבוצות השלילה, השמאלי) נוכל להסיק ש-לא A. עד כאן זה גם אינ' (אחר כך אנו נהפוך את לא A ל- A, ועם זה האינ' כבר לא יסכימו)

סכימת ההוכחה:

$$\begin{array}{ll} (A \rightarrow B) \rightarrow A & \text{N'JJ} \quad 1 \\ \neg A & \text{N'JJ} \quad 2 \\ \vdots & \\ A \rightarrow B & \text{N'JJ} \quad 20 \\ (MP, 20, 1) & A \quad 21 \end{array}$$

אז איך נוכיח את 20? בניח את A ונראה ש-B:

$$\begin{array}{ll} (A \rightarrow B) \rightarrow A & \text{P1} \\ \neg A & \text{P2} \\ A & \text{P3} \\ B & \text{P4} \\ A \rightarrow B & \text{P5} \\ (MP, 2, 5) & \text{A} \end{array}$$

עכשיו נראה הוכחה מסודרת (בצורה לינארית):

[עמוד הבא]

הנחות	צידוק	טענה
①	הנחה	1. $(A \rightarrow B) \rightarrow A$
②	הנחה	2. $\neg A$
③	הנחה	3. A
②, ③	2, 3 וכל סילוק השלילה $\neg$ NDI	4. B
②	4, $(\Rightarrow \rightarrow)$	5. $A \rightarrow B$
① ②	5, 1 $(\rightarrow \Rightarrow)$	6. A
①	6, 2 $(\Rightarrow \neg)$	7. $\neg A$
①	7 $(\neg \Rightarrow)$	8. A
$\emptyset$	8 $(\Rightarrow \neg)$	9. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

תרגיל בית: להראות את הכלל ההכנסה של שלילה.

כמה הבהרות והעשרה

אז איך מוכיחים - סדרת נוסחאות או סקוונטים? הרי לדוגמא בהוכחה האחרונה (זו כאן מעלינו הלינארית) ליד המספרים יש נוסחאות... אז התשובה היא: רק סקוונטים! זה שיש טענות זה בתוך טבלה שלנו כאן למעלה זה נכון, אבל נתסכל שמאלה ונראה שכל שורה באה עם עוד נתונים, שהם ההנחות (וההצדקה למה השורה הזו קיימת - תוספת שעוזרת!) אז בסך הכל כל שורה היא למעשה סקוונט!

איך מראים שאי אפשר ב-NDI את הטענה מהתרגיל האחרון (זה שהוכחנו בשלילה)? שהרי הראינו כי זה נכון ב-NDI אך לא שזה לא נכון ב-NDI. וזה שאנו הוכחנו בשלילה, מה שלא קיים ב-NDI, לא אומר שזה לא נכון ב-NDI (כי יתכן שניתן להוכיח את זה שלא בשלילה) - אז זו שאלה קשה....

ראינו כאן ב-NDI שיכולנו לעשות חלוקה למקרים (בתרגיל מבדידה שאיתו התחלנו, ויש לנו את כלל הסילוק של "או" שבדיוק עושה את זה). אבל יחס הנביעה ב-NDI שווה ליחס הנביעה ב-HPC, אז איך ב-HPC הפרדנו למקרים? שם זה הופיעה בצורה של גרירה של גרירה של גרירה של גרירה....