

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 13

כמה מילים על המבחן

יהיו שני חלקים:

1. שתי שאלות חובה
2. בחרים 2 מתוך 3
- כלומר בסך הכל 4 שאלות.

נקבל דף עם האקסיומות של הילברט וכללים של דדקוציה בטעית (כלומר לא צריך לשנן)
אבל - שקילויות לוגיות צריך לדעת בעל פה.

במה אפשר להשתמש במבחן?

כל מה שעשינו בכיתה ובתרגול, בתנאי שמצטטים באופן מדויק את הטענה שהוכחנו: "הוכחנו בתרגיל בית את משפט ההחלפה עבור ... שאומר ...". לא יתקבל "על פי מה שהוכחנו בכיתה..." כמו כן, אפשר להשתמש בדברים גם מתרגילי בית.

השבוע יפורסם תרגיל שהוא לא להגשה. לא יפורסם לו פתרון - למי שי שאלה ספציפית, אפשר לשאול את לירון (המתרגלת).

שני נושאים שגרצה לדבר עליהם היום:

- לוגיקה מסדר ראשון
- שפה רב סוגית

לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון

מה זה שפה עם שוויון? זו שפה שיש בה סימן יחס דו מקומי = המוכרז כשוויון. מה המשמעות של מורכז כשוויון? עשינו את זה עד עכשיו אבל לא קראנו לזה בשם הזה.

תחילה: מה זה מבנה נורמלי? מבנה המפרש את הסימן = כיחס הזהות. כלומר הפירוש של = במבנה הוא:

$$I[=] \simeq \{(a, a) | a \in A\}$$

בדרך כלל אמרנו שהפירוש של שווה תמיד יהיה שווה ולא נתנו לו משמעות אחרת - זו המוסכמה: כשיש = בשפה שלנו, אנחנו רוצים שהוא תמיד יפורש כשווה.

מה קורה בעקבות ההנחה הזו? יש לנו את רשימת אקסיומות השוויון, מסומנות ב- $Eq(L)$.

והן:

1. $\forall x (x=x)$
2. $\forall x \forall y (x=y \rightarrow y=x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (x=y \wedge y=x \rightarrow x=z)$

אז למה אמרנו שפה? כי צריך להגיד ש:

4. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1=y_1 \dots x_n=y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$
5. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$

נשים לב שפונקציה זה שווה, סימני יחס זה גרירה.

שאלה

כל מבנה של $Eq(L)$ הוא מבנה נורמלי?

לא נכון!

נסתכל על המבנה:

$$D = \{0, 1\}$$

$$I[=] \simeq \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

אבל ראינו בשיעור שתמיד אפשר למצוא מבנה נורמלי (לא נוכיח את זה אבל נניח שזה נכון).

אם נרצה להוכיח משהו בתחשיב הילברט עבור שפה עם שוויון נוכל להשתמש באקסיומות האלה. אבל למדנו גם תחשיבים אחרים כמו דדקוציה טבעית - ואיך שם משתמשים בחוקים החדשים עבור שוויון?

דדקוציה טבעית עם שוויון - $NDFOL^=$

מתי נגיד ש: $\Gamma \vdash_{NDFOL^=} \varphi$?

יש לנו 2 דרכים לעשות את זה:
א:

$$\begin{array}{l} \Gamma \subseteq T \cup Eq(L) \text{ ו } \Gamma \text{ סגור} \\ \vdash_{NDFOL^=} \Gamma \Rightarrow \varphi \quad \text{ע"י } P \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{NDFOL^=} \varphi \end{array}$$

ב:

להוסיף ל- $NDFOL$ סכימת אקסיומה: לכל שם עצם S : $S = S \Rightarrow$ ואת כלל ההחלפה:

$$\text{כאשר } \varphi' \text{ מתקבלת מפי' ע"י החלפת מופעי' } s \text{ ב- } t. \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow S=t \quad \Gamma_2 \Rightarrow \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \varphi'}$$

השני בדרך כלל יותר נוח.

דוגמא

נרצה להוכיח:

$$\text{Model} = \forall z (z=x \rightarrow z=y) \rightarrow x=y$$

הוכחה:

$$\begin{array}{r} \forall z (z=x \rightarrow z=y) \Rightarrow \forall z (z=x \rightarrow z=y) \quad (\exists \forall) \\ \hline \Rightarrow x=x \quad \forall z (z=x \rightarrow z=y) \Rightarrow x=x \rightarrow x=y \quad (\exists \rightarrow) \\ \hline \forall z (z=x \rightarrow z=y) \Rightarrow x=y \quad (I \rightarrow) \\ \hline \Rightarrow \forall z (z=x \rightarrow z=y) \rightarrow x=y \end{array}$$

הסבר: ND עם גרירה - עם מה נתחיל? כשיש גרירה האקסיומה שנתחיל איתה היא מה התחנו. עכשיו איזה הצבה נעשה במקום z ? כנראה x .

משפט לבנהיים סקולם (לפעמים נראה גם משפט הכיווץ)

אם ל- T יש מודל אז יש לה מודל בן בניה.

עולה השאלה האם זה המשפט המינימלי? כלומר האם אפשר להחליף את "בן מניה" בסופי? אז כנראה שלא כי אז זה לא היה מפורסם. לפעמים אפשר לקבץ למודל סופי אבל לפעמים המינימום הוא מודל בן מניה. נמצא פסוק ϕ שיש לו מודל אבל אין לו מודל סופי.

למה הבאנו את זה?

1. כדי שנבין שכשכמה שיש יותר דרגות חופש זה קשה להראות. מה מקבע את דרגות החופש? השוויון. אם כל דבר בנוסחא היינו יכולים לפרש איך שנרצה זה היה יותר קשה כי היינו יכולים להמציא פירוש מופרך לסימני היחס. אז לפעמים כדאי לעבוד עם $=$.
2. כדי למצוא דוגמאות לדברים כאלה במבחן לחשוב על משפטים שאנחנו מכירים ממתמטיקה.

אנחנו רוצים להגיד משהו שאם המבנה שלי סופי זה לא יכול להתקיים.

נחשוב קצת ונזכר במשפט הזה:

$f: D \rightarrow D$ כאשר D סופי - אם f חח"ע אז f היא על. אנחנו יודעים שאם D אינסופי זה לא נכון. כל מה שצריך זה לתרגם את זה לפסוק:

$$\forall x \forall y (f(x)=f(y) \rightarrow x=y) \wedge \exists z \forall x (f(x) \neq z)$$

אז כמו שעשינו - עדיף לקחת משהו ממתטיקה כי אם לא זה יהיה קשה להראות את זה.

נזכור: אם יש בשפה שוויון - אנחנו תמיד מניחים שמדברים על מודלים נורמליים.

וכעת לנושא הבא של השיעור

שפה רב סוגית

לפעמים יותר נוח שיש כמה דברים בשפה – למשל סקלרים ווקטורים. תור ומחסנית. מה השוני? כשאנחנו מגדירים את השפה לא מספיק להגדיר רק משתנים או יחסים וכו' אלא צריך להגדיר ממש סוג של כל דבר - משתנה מאיזה סוג הוא ולגבי יחס איזה סוגים הוא מקבל. כלומר יש תוספת מידע שאנחנו צריכים לתת על השפה שלנו. עוד משהו שונה - עניין הכמתים. אם בשפה חד סוגית היה "לכל x משהו" אז ברב סוגית אי אפשר להגיד את זה אל רק "לכל x מסוג מסוים משהו". כימותים עובדים לפי סוגים.

כמה הגדרות:

סמנטיקה (לשפה רב סוגית): צריך להגדיר כמה דברים.

מבנה: התחום הוא איחוד של D_r כאשר r סוג כלשהוא (והתחום לא ריק). הפירוש:

$$1. I[c^s] \in D_r$$

$$2. I[p] \subseteq D_{r_1} * \dots * D_{r_n} \text{ כאשר } p: r_1 * \dots * r_n \rightarrow o$$

$$3. \Sigma(f): D_{r_1} \times \dots \times D_{r_n} \rightarrow D_r \text{ כאשר } f: r_1 \times \dots \times r_n \rightarrow r$$

השמה: ההשמה "תרבד" את הסוגים: $v[x^s] \in D_s$

מה מרויחים מזה? כלום. חוץ מנוחיות. כל מה שאפשר להגדיר בשפה רב סוגית אפשר להגדיר בשפה מסדר ראשון - פשוט לעיתים זה יותר קל.

אז נראה איך עושים את זה - יש רדוקציה שמעבריה אותנו משפה רב סוגית לשפה חד סוגית.

אם סיגמה סיגנטורה רב סוגית נגדיר סיגמה' סיגנטורה חד סוגית:

- אם S_i סוג בסיגמה אז נוסיף לסיגמה' פרדיקט חד מקומי S_i .
- אם c^s קבוע בסיגמה אז בסיגמה' יהיה סימן קבוע c .
- אם p סימן יחס בסיגמה אז בסיגמה' יהיה סימן יחס p .

כלומר בקבועים, פונקציות ויחסים אין שינוי, פשוט בלי הסימנים של הסוגים. מה שכן חשוב זה שכל סוג אנחנו מתרגמים על ידי פרדיקט חד מקומי שיתרגם אותו.

נגדיר את $Th(\sigma)$ - אוסף של פסוקים ב- $L(\sigma')$:

הסרנו את הסוגים, ולכן נצטרך לדרוש את זה בדרך אחרת:

1. לקבוע c מסוג s : $S(c)$.

2. לפונקציה $R: s_1 * \dots * s_n \rightarrow o$ כאשר $\forall x_1 \dots \forall x_n (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow s_1(x_1) \wedge \dots \wedge s_n(x_n))$

3. $\forall x_1 \dots \forall x_n (S_1(x_1) \wedge \dots \wedge S_n(x_n) \rightarrow S(\langle x_1, \dots, x_n \rangle))$ כאשר $f: s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$

נגדיר תרגום: התרגום של איזה שהיא נוסחה יראה ככה:

- שמות עצם: לכל משתנה x נתאים משתנה שונה x .

$$Tr[c^s] = c$$

- $Tr[f(t_1, \dots, t_n)] = f(Tr[t_1], \dots, Tr[t_n])$
- עבור נוסחאות: $Tr[\neg \phi(t_1, \dots, t_n)] = \neg Tr[\phi(t_1, \dots, t_n)]$
(עבור שלילה וכו' כמו שברור להגדיר: תרגום של NOT זה NOT התרגום)
- עבור כמתים: $Tr[\forall x \phi] = \forall Tr[x^s] (S(Tr[x^s]) \rightarrow Tr[\phi])$
: $Tr[\exists x \phi] = \exists Tr[x^s] (S(Tr[x^s]) \wedge Tr[\phi])$
(נזכור! כמו שאמרו לכל הולך על גרירה וקיים הולך עם וגם)

זה היה הגדרה רשמית לאיך מתרגמים. נראה דוגמא ונבין את זה טוב יותר.

דוגמא (ממבחן)

"כל יחס בינארי טרזיטיבי וסימטרי הוא רפלקסיבי" - זה משפט ואנחנו רוצים להצרין אותו. כשבאים לעשות את זה צריך להבין שברור שיש כאן שני סוגי עצמים - יחסים ועצמים שנמצאים בתוך היחסים ולכן חושבים שהכי נוח זה להצרין את זה בשפה רק סוגית. צריך להבין את זה כי כתוב לכל יחס ואי אפשר לכתוב $\forall R$ כדי לדבר עם כל יחס. בעיקרון אי אפשר לכמת עליו - אבל זה בדיוק מה שעושה שפה רב סוגית.

נגדיר:

הסוגים: r - עבור יחסים, s - עבור עצמים.

המשתנים שלנו: (צריך לציין מאיזה סוג הם) R^r, x^s, y^s, z^s . נשים לב ש- R^r כאן זה לא סימן יחס. כולם פה משתנים (נכון ש- R^r הוא משתנה מסוג "יחס").

נתחיל את ההצרנות:

$$Sym(R^r) = \forall x^s \forall y^s \dots$$

נתקענו... כי R^r הוא לא סימן יחס ולא נוכל להתשמש בו ככזה. לכן אנחנו צריכים להגדיר יחס חדש בשפה שלנו:

$$Hold : r \times s \times s \rightarrow o$$

וכעת: (H זה Hold)

$$Sym(R^r) = \forall x^s \forall y^s (H(R^r, x^s, y^s) \rightarrow H(R^r, y^s, x^s))$$

$$Trans(R^r) = \forall x^s \forall y^s \forall z^s (H(R^r, x^s, y^s) \wedge H(R^r, y^s, z^s) \rightarrow H(R^r, x^s, z^s))$$

$$Ref(R^r) = \forall x^s H(R^r, x^s, x^s)$$

ואז:

$$\psi = \forall R^r (Syn(R^r) \wedge Trans(R^r) \rightarrow Ref(R^r))$$

אז עד כאן כל טוב ויפה. הצרנו בלוגיקה רב סוגית (φ הוא ההצרנה). אך השאלה הייתה עבור סדר ראשון (בסעיף הבאה של השאלה) אז עלינו לתרגם זאת ללוגיקה מסדר ראשון (כלומר לא ללוגיקה מסדר ראשון עם שוויון).

לא היינו חייבים לעשות בשפה רב סוגית - אפשר ישר לעשות את זה ככה. ואז אפשר להחליט מה שיותר נוח לנו. לעשות ואז לתרגם או ישר לעבוד בלוגיקה מסדר ראשון. יתכן שבשבחן יבקשו להשתמש בלוגיקה רב סוגית ואז לתרגם.

אז התרגום הוא:

תחילה - השפה:

- משתנים: x, y, z, R
- יחסים: $Hold^3, s^1, r^1$ (מוסיפים סימן יחס חד מקומי לכלל סוג)

ונגדיר את התרגום:

- של משתנים:

$$Tr(x^1) = x \quad Tr(y^1) = y \quad Tr(z^1) = z \quad Tr(R^1) = R$$

- וכעת (די מחופף, מספיק להבין את הרעיון):

$$\begin{aligned} Tr[Syn(R^1)] &= \forall x (S(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow (Hold(R, x, y) \rightarrow H(R, y, x) \dots \\ &= \forall x \forall y (S(x) \wedge S(y) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$Tr(\psi) = \forall R (r(R) \rightarrow (Tr[Syn(R)] \wedge Tr[Trans(R)] \rightarrow Tr[Ref(R)])$$

אבל התרגום איננו מספיק כדי להצרין את הסענות בשפה חד סוגית. כלומר ההצרנה היא לא $Tr(\psi)$

אלא היא צריכה להיות $Tr(\psi) \rightarrow Tr[e]$ (כאשר הכוונה כאן ב- $Tr(\psi)$ זה "וגם"-ים בין כל האיברים של $Tr(\psi)$).

אז מה $Tr(\psi)$ במקרה שלנו? למעשה היא מורכבת רק מפסוק אחד והוא:

$$\psi = \forall x \forall y \forall z (H(x, y, z) \rightarrow r(x) \wedge S(y) \wedge S(z))$$

ולכן ההצרנה עבור פסוק פסי תהיה:

$$\psi \rightarrow Tr[e]$$

אם $\text{Tr}(\sigma)$ הייתה מכילה לדוגמא שלושה איברים (אם היו לנו עוד קבועים, סימני פונקציה או יסמני יחס):

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \rightarrow \text{Tr}[e]$$