15.3.09

לוגיקה למדמ"ח - שיעור 2

בשיעור שעבר:

התחלנו עם "תחשיב הפסוקים הקלאסי" - CPL.
ראינו את השפה (הערה קטנה: את הפסוקים האטומיים נסמן ב- $P_1, P_2, \ldots$ ולא ב- $p_1, p_2, \ldots$ [כלומר באותיות גדולות]. את האותיות הקטנות נשמור למשתנים פסוקים אטומיים)
[עם או בלי אינדקסים]

נתחיל עם השיעור עם בלבולים אפשריים:

- הגדרנו מתי $v \models \varphi$ (v מספק את φ). הגדרנו השמה (v) וגם הרחבנו אותה (v^*) [הרחבה מפונ' מקבוצת הפסוקים האטומיים לפונ' מקבוצת כל הפסוקים].

- נתנו 2 הגדרות מתי $v \models \varphi$ ושתי ההגדרות שקולות. נראה זאת! (נגדיר קודם שוב:)

<u>הגדרות</u>: 1) השמה v מספקת את הנוסחה φ (או "φ נכון ב-v") אם: $v(\varphi) = t$. במקרה זה נסמן $v \models \varphi$.
(או "v מודל של φ")

2) תהי T קבוצה של נוסחאות (או פסוקים, ~~בינתיים~~ אמרנו שזה אותו דבר) ב-CPL
נאמר שהשמה v היא מודל של T ($v \models T$) אם v מודל של כל אחת מהנוסחאות ב-T. פורמלית:

$$V \models T \iff \forall_{A \in T}.\ V \models A$$

3) A נובע מ- T ב- CPL אם כל מודל של T הוא גם מודל של A. (נסמן ב- $T \vdash A$).

4) φ נקראית טאוטולוגיה אם כל השמה היא מודל שלה.

כלומר לכל השמה v: $v(\varphi)=t$. (כלומר נובע מ0 הנחות)

<u>תרגיל</u>: φ היא טאוטולוגיה (של CPL) אם $\emptyset \vdash_{CPL} \varphi$.

(רמז: כל v הוא מודל של הקבוצה הריקה, כי היא מספקת "כל" איבר בה)

מתי $v \models \neg\psi$?

$$V \models \neg\psi \iff v(\overset{①}{\neg}\psi)=t \iff \overset{②}{\neg}(v(\psi))=t \iff v(\psi)=f$$

$$\iff V \not\models \psi$$

פירוש עבור סימן:

$g_{\neg}(v(\psi))$

① הוא הקשר

② הוא פונ׳ האמת המתאימה

מתי $V \models A \vee B$?

$$V \models A \vee B \iff v(A \overset{①}{\vee} B)=t \iff v(A) \overset{②}{\vee} v(B)=t$$

$\iff$ ($v(A)=t$ וגם $v(B)=t$)

או ($v(A)=t$ וגם $v(B)=f$)

או ($v(A)=f$ וגם $v(B)=t$)

(פה יש אינטואיציה בלוגיקה)

$\iff$ $v(A)=t$ או $v(B)=t$

$\iff$ $V \models A$ או $V \models B$

באופן דומה אפשר לעשות זאת עבור $A \wedge B$ ו- $A \rightarrow B$.

ובכך קיבלנו את ההגדרה השניה שראינו בשיעור שעבר.

(אם היינו מתחילים ממנה, היינו יכולים להגיע להגדרה הראשונה).

נק' חשובה ב"בילבולים"

- נניח נרצה לבדוק האם משהו הוא טאוטולוגיה. נניח נרצה לבדוק את $\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_{17}) \rightarrow p_{17}$. בבדיקה שעשינו בטבלת אמת:

p_1	p_{17}	$\neg p_1$	$p_1 \vee p_{17}$	$\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_{17})$	$\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_{17}) \rightarrow p_{17}$
t	t			-	t
t	f		- -		t
f	t			- -	t
f	f		- -		t

שמנו כאן את σ ההשמות ← לפיהם ידענו את הערכים σ ← ובדקנו שב-σ t

איך זה קשור אלינו? אנחנו הבדקנו שהפסוק הוא טאוטולוגיה אם כל השמה σ מספקת אותה. כמה השמות יש? $2^{\aleph_0}$! אפילו לא בן מניה. ואנחנו לא בדקנו את כולם, אלא רק 4!

ואפילו לא השמנו בכל הפסוקים האטומיים!

~~[illegible]~~

אז נניח שב-σ השורה הם t. עדיין יש לנו רק 4 השמות. "מה אם σ ה-$2^{\aleph_0}$ האחרות?". לשם כך נצדיק זאת.

אבל נוכיח אותה אך לפני נכתוב אותה.

תחילה נצטרך להגדיר מספר סימונים:

$At(\varphi)$ - קבוצת הפסוקים האטומיים שמופיעים ב- φ.

$Sf(\varphi)$ - קבוצת תתי-הנוסחאות של φ (הוגדר בתרגול).

ועכשיו ללמה:

<u>למה:</u> אם $V_1(p)=V_2(p)$ לכל $p \in At(\varphi)$

אז $V_1(\varphi)=V_2(\varphi)$

ערך האמת של נוסחה נקבע רק ע"י ערכי האמת של הפסוקים האטומיים המרכיבים אותה.

זה נותן לנו את ההצדקה לשימוש בטבלאות אמת.

נניח שרצינו את העובדה $p_1 \to p_1$ טאוטולוגיה. בסדר, לא נניח,

בואו נמצא:

p_1	$p_1 \to p_1$
t	t
f	t

מצאנו.

כעת, האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה?

$$((p_2 \to p_1) \to p_5) \longrightarrow ((p_2 \to p_1) \to p_5)$$

אז אפשר לבדוק באמצעות טבלה ($2^3=8$ שורות...) אבל אינטואיטיבית

זה נראה לנו נכון. נצדיק את זה.

תחילה נצטרך לנסח את הלמה שמצדיקה את זה, ולאחר

מכן נוכיח אותה. נכניס תחילה סימון:

<u>סימון:</u> נסמן ב: $A\underbrace{\{\varphi_1/p_1, \dots, \varphi_k/p_k\}}_{\text{נקרא "הצבה"}}$ את הנוסחה המתקבלת

ב-A ע"י שמציבים בכל מקום ב-A את φ_i במקום p_i $(i=1,\dots,k)$.

$$\left[\text{דוגמא: } [\neg p_1 \to p_5]\left\{ \frac{p_2\to p_3}{p_1}, \frac{\neg(p_2\to p_7)}{\cancel{p_5}} \right\} \quad \text{זה: } \neg(p_2\to p_3) \to \neg(p_2\to p_7) \right]$$

פורמלית, נגדיר זאת רקורסיבית: (לצורך קיצור נסמן: $A' = A\{\varphi_1/p_1,\dots,\varphi_k/p_k\}$)

- אם A פסוק אטומי: אם $A=p_i$ $(1\le i\le k)$ אז: $A'=\varphi_i$

  אם $A\ne p_i$ $(1\le i\le k)$ אז: $A'=A$

- עבור ¬: תוצאת ההצבה של הצבה ב-¬A היא השלילה של תוצאת ההצבה של ב-A:

$$[\neg B]\{\varphi_1/p_1,\dots,\varphi_k/p_k\} = \neg[B\{\varphi_1/p_1,\dots,\varphi_k/p_k\}]$$

- עבור $*\in\{\vee,\wedge,\to\}$:

$$[A*B]\{\varphi_1/p_1,\dots,\varphi_k/p_k\} = A\{\varphi_1/p_1,\dots\} * B\{\dots\}$$

הלמה אותה אנו רוצים להוכיח:

<u>למה</u>: אם A טאוטולוגיה אז גם $A\{\varphi_1/p_1,\dots,\varphi_k/p_k\}$ טאוטולוגיה

(עבור כל p_i, φ_i).

ההוכחה תהיה בדוגמה: תהי v השמה (כלשהי) ונשתמש בכך של השמה מספקת את A ונבנה לה השמה עבור A ממנה נוכל להסיק עבור ההשמה v.

$$\underbrace{((p_2\to p_1)\to p_5)}_{B}\to((p_2\to p_7)\to p_5)$$

$$v'(p\to p) = \left[\begin{array}{c} \text{נגדיר לדוגמא: } v'(p)=v(B) \\ \text{מיד נראה איך עושים זאת פורמלית} \end{array}\right] = v(B\to B)$$

כדי להוכיח אותה נעזר במשפט:

<u>משפט ההצבה</u>: תהי v - השמה, $p_1,\dots,p_k$ - פסוקים אטומיים, $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ - פסוקים.

נגדיר השמה v' באופן הבא:

$$v'(q)=\begin{cases} v(\varphi_i) & q=p_i \quad (i=1,\dots,k) \\ v(q) & q\notin\{p_1,\dots,p_k\} \end{cases}$$

אז לכל פסוק A:
$$v\left(A\left\{{}^{\varphi_1}/_{p_1}, \dots, {}^{\varphi_k}/_{p_k}\right\}\right) = v'(A)$$

במקרה שלנו:

$$A = p_1 \to p_1 \qquad \varphi_1 = (p_1 \to p_2) \to p_5$$
$$A\left\{{}^{\varphi_1}/_{p_1}\right\} = \left((p_1 \to p_2) \to p_5\right) \to \left((p_1 \to p_2) \to p_5\right)$$
$$v(\dots) = v'(p_1 \to p_1)$$

<u>הוכחת משפט ההצבה</u> (באינדוקציה כמובן)

בסיס:

אם A הוא p_i עבור $1 \le i \le k$:

$$v(A\{\dots\}) \underset{\text{מהגדרת הצבה}}{=} v(\varphi_i) \underset{\text{הגדרת } v'}{=} v'(p_i) = v'(A)$$

אם A הוא פסוק אטומי (שנסמנו ב-q) אך $A \neq p_i$ עבור $1 \le i \le k$:

$$v(A\{\dots\}) = v(q\{\dots\}) \underset{\text{הגדרת הצבה}}{=} v(q) \underset{\text{הגדרת } v'}{=} v'(q)$$

מעבר:

(נעשה רק עבור $\to$, ניתן להשלים למקרים האחרים)

נניח $A = B \to C$ אז

$$v(A\{\dots\}) \underset{\text{הגדרת הצבה}}{=} v\left(B\{\dots\} \to C\{\dots\}\right) \underset{\text{כי הגדרת השמה (} v \text{ היא השמה)}}{=} v(B\{\dots\}) \xrightarrow[\text{הפונ' המתאימה (בין 2 ערכי אמת)}]{} v(C\{\dots\}) =$$

הגדר מהצבה (כל בין 2 נוסחאות)

$$= \underset{\text{ה.א.}}{} v'(B) \to v'(C) \underset{\text{כי } v' \text{ השמה}}{=} v'(B \to C) = v'(A)$$

אם נחליף את $\to$ ב: $*$ כך ש: $* \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ היינו מוכיחים

שוב 2 המקרים האחרים סגור באלה: תרגילון!

<u>הוכחת הטענה</u> (זו שבאה לפני שלב ההגדרה):

תהי v השמה (כלשהי) אז לפי שלב ההגדרה:

$$v(A') = v'(A) = t$$

A' כי טאוטולוגיה

$$\left(A' \underset{\text{סימון}}{=} A\{{}^{\varphi_1}/_{p_1}, \dots, {}^{\varphi_k}/_{p_k}\}\right)$$

<u>הכללה</u>: אם Γ קבוצה סופית ו: $\Gamma \vdash_{CPL} A$, אז:

$$\Gamma\{{}^{\varphi_1}/_{p_1}, \dots, {}^{\varphi_k}/_{p_k}\} \vdash_{CPL} A\{{}^{\varphi_1}/_{p_1}, \dots, {}^{\varphi_k}/_{p_k}\}$$

למעשה לא הגדרנו הצבה של קבוצה סופית של נוסחאות, הכוונה לכל נוסחה בקבוצה.

הוכחת ההכללה היא תרגיל.

למה דיברנו כך הרבה זמן על טאוטולוגיה? כי נוכל לעשות רדוקציה לטאוטולוגיה!

<u>שקול</u>: ① $A_1, \dots, A_n \vdash_{CPL} B$, אמ"מ

② הנוסחה $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ היא טאוטולוגיה.

<u>הוכחה</u>: נוכיח את הטענה לפי הלמות הבאות:

למה I: $A_1,\dots,A_n \vdash_{CPL} B$ אמ"מ $A_1\wedge\dots\wedge A_n \vdash_{CPL} B$

למה II: $A\vdash_{CPL} B$ אמ"מ $A\to B$ הוא טאוטולוגיה.

את הוכחת למה I והוכחת המשפט משתי הלמות נשאיר כתרגיל.
אנו נוכיח כאן את למה II. למעשה נוכיח הכללה שלה:

<u>משפט הדדוקציה הסמנטי</u>: אם T קבוצה של פסוקים,
אז $T,A\vdash B$ אמ"מ $T\vdash A\to B$

(כמובן, אמורים לכתוב $T\cup\{A\}$)

<u>הוכחה</u>

- נניח ש: $T\vdash A\to B$. נראה כי $T,A\vdash B$

יהי v מודל של $T\cup\{A\}$. (אז $v(A)=t$ ו- v מודל של T).

כיוון ש $T\vdash A\to B$ אז $v(A\to B)=t$. לפי טבלת האמת של $\to$
אם $v(A)=t$ ו- $v(A\to B)=t$ אז $v(B)=t$, כלומר v הוא מודל של B.

- נניח ש: $T,A\vdash B$. נראה כי $T\vdash A\to B$.

יהי v מודל של T.

אם v אינו מודל של A, אז $v(A)=f$ (לפי ההגדרה של מודל)
ולכן $v(A\to B)=t$.

אם v כן מודל של A אז כיוון שהוא גם מודל של T,
הוא מודל של $T\cup\{A\}$. כיוון ש $T,A\vdash B$ נקבל ש-v מודל של
B, כלומר $v(B)=t$. ומכאן נובע ש: $v(A\to B)=t$.

סה"כ, בשני המקרים (מודל של A או לא), $v(A\to B)=t$. כלומר $v\models A\to B$
(v מודל של $A\to B$)

הערה על סימונים:

מה שאנחנו מסמן ב- $T \vdash_{CPL} A$, בהרבה ספרים מסמנים $T \models_{CPL} A$

(ואתם ב- CPL) ואז יש כפל סימונים עבור:

$T \models A$ $\qquad$ $V \models A$

קבוצה של נוסחאות $\qquad$ השמה

(כאן זה יחס בין קבוצת נוסחאות לנוסחאות) (כאן זה יחס בין השמות לנוסחאות)

נגדיר ספיקות.

<u>הגדרה</u>: תורה T נקראת ספיקה אם יש לה מודל (השמה).

פסוק φ נקרא ספיק אם יש לו מודל (השמה) מקיים אותו, כי:

(הפסוק φ ספיק $\Leftrightarrow$ התורה $\{\varphi\}$ היא ספיקה)

<u>משפט</u>: $T \vdash_{CPL} A$ אמ"מ התורה $T \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה.

((תרגיל, ההוכחה בתרגול))

האם $\Gamma \vdash_{CPL} A$ זו בעיה כריעה עבור Γ סופית (טבלאות אמת מכריעות אותה). אך מה קורה כאשר Γ אינה סופית?

כאן בא לעזרתינו המשפט הבא:

<u>משפט הקומפקטיות</u>

נוסח א': $T \vdash_{CPL} A$ אמ"מ קיימת $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש: $\Gamma \vdash_{CPL} A$

נוסח ב': T היא ספיקה אמ"מ כל קבוצה סופית חלקית של T היא ספיקה.

שני הניסוחים הינם שקולים (בגלל הקשר בין ספיקות לנביעה.
(שראינו במשפט לפי משפט הקומפקטיות).

הוכחת המשפט אינה טריוויאלית ונראה אותה בהמשך הקורס.
בינתיים נוכיח את משפט הקומפקטיות נוסח א', עם משפט הקומ' נוסח ב':

- הכיוון ⇐ אם יש $T' \subseteq T$ סופית כך ש: $T' \vdash_{CPL} A$ אז גם $T \vdash_{CPL} A$
הנו טריוויאלי!

- הכיוון ⇒ ההפוך. נניח $T \vdash_{CPL} A$ אז $T \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה.
לכן לפי משפט הקומ' נוסח ב' יש קבוצה סופית חלקית $\Gamma \subseteq T \cup \{\neg A\}$
שאינה ספיקה. אז גם $\Gamma \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A$

נ.ב. לא בדיוק מה שרצינו להוכיח. (כי הנחנו ש-A חלק מהקבוצה הסופית)
השלמת ההוכחה: תרגיל לבית.

אם יש לנו תיאור של T אינסופית בתור מנייה (נניח אלג' שיכול
לייצר את איברי T). לבדוק האם $T \vdash_{CPL} A$ יש שיטה
שהיא חצי-מכריעה אותה. (RE).

האלג' ייצר נוסחא ב-T ויבדוק האם ממנה נובע A,
אחר מכן ייצר עוד נוסחא ויבדוק האם משתיהן נובע A, וכך הלאה...

אם $T \vdash_{CPL} A$ אז יש קבוצה סופית $\Gamma \subseteq T$ כך ש: $\Gamma \vdash A$
והאלג' ימצא אותה לבסוף

אם $T \nvdash_{CPL} A$ האלג' ימשיך לרוץ עד אינסוף ואולי לא נוכל לדעת
נכונות...