

לוגיקה למדמ"ח – שיעור 13

שיעור השלמה

בחלק הראשון של השיעור נקדיש כדי להשלים את הנושא שעסקנו בו בפעם הקודמת - השימוש במשפט הרברנד. את החקל הטכני ראינו בתרגול (בדוגמא מפורטת), עכשיו אנחנו נתסכל על החלק התיאורטי.

נזכר, משפט הרברנד מדבר על תורה אוניברסלית - מתי היא ספיקה. כדי שנוכל ליישם אותו, לדוגמא האם רוצים לבדוק $\mathcal{T} \models A$ (כאשר $T \cup \{A\}$ קבוצה של פסוקים) שזה שקול להאם $T \cup \{\neg A\}$ ספיקה - צריך שהיא תהיה נתונה בצורה אוניברסלית כדי להשתמש במשפט הרברנד, אם לא צריך להעביר את זה לזה. את זה אנחנו עושים על ידי העברת לצורה פרנקסית נורמלית, כלומר הבעיה שלנו שקולה עבור $\text{Prenex}(T \cup \{\neg A\})$ ספיקה, וזה שקול להאם $\text{Skolem}(T \cup \{\neg A\})$. על האחרון כבר אפשר להפעיל את משפט הרברנד.

נדבר על המעבר בין השני לשלישי (המעבר אל הפרנקסי). המשפט המרכזי בקשר לשקילויות הוא המשפט הבא:

משפט החלפת אקוויולנטיים

הוא אומר: $A \leftrightarrow A' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ כאשר φ' מתקבל מ- φ על ידי החלפת המופעים של A ב- A' . ההוכחה היא כמובן באינדוקציה על מבנה φ .

- בסיס: (שמכסה גם את המקרה בו φ אטומי)
1. φ הוא A עצמו, ואז φ' הוא A' . הטענה אז טריוויאלית.
 2. A בכלל לא חלק מ- φ (או שלא החלפנו שום A ב- A'). ואז φ' ו- φ הן זהות. שוב הטענה במקרה זה היא טריוויאלית.

מעבר:

יהיה די דומה להוכחה בתחשיב הפסוקים, המקרה החדש ביחס לתחשיב הפסוקים יהיה הכמתים. אם $\varphi = \neg \psi$ ו- $\varphi' = \neg \psi'$ ומהנחת האינדוקציה $A \leftrightarrow A' \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$ ולכן גם $A \leftrightarrow A' \vdash \neg \psi \leftrightarrow \neg \psi'$ (צריך למה קלה בשביל המעבר האחרון). כעת אם $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, (שני האחרים – תרגיל). נניח $\varphi = \forall x \psi$ ו- $\varphi' = \forall x \psi'$.

רגע נרשום:

במקרים בהם $\varphi = A$ ו- $\varphi' = A'$ או φ ו- φ' זהות כוסו כבר. נותר המקרה בו $\varphi = \forall x \psi$ (כאשר ψ' מתקבל מ- ψ ע"י החלפות של A ב- A').

לפי הנחת האינדוקציה $A \leftrightarrow A' \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, כמו כן (כתרגיל)

לקיים בדיוק כמו "לכל".
 $\Psi \leftrightarrow \Psi' \vdash \forall x \Psi \leftrightarrow \forall x \Psi'$ ולכן $A \leftrightarrow A' \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ גם במקרה הזה.

מסקנה: אם $T \vdash A \leftrightarrow A'$ אז $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ (כאשר φ ו- φ' הם כמו בטענה הקודמת).

מקרה פרטי למסקנה: אם A ו- A' שקולים לוגית אז φ ו- φ' שקולים לוגית (כאשר שוב - הם כמו בטענה הקודמת).

תזכורת: φ ו- φ' שקולים לוגית אם $\vdash_{\text{FOL}} \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

יש אינסוף שקילויות לוגיות נכונות, אבל יש לנו כמה חשובים, אלה מתחשיב הפסוקים נכונים כמובן גם כאן (שהם נמצאים בדף שחולק לנו בעבר) לגבי כמתים - חילקנו דף בשיעור שעבר.

אזהרה:

המסקנה אינה נכונה ל- t -נביעה. דוגמא: למשל

$$X = X \leftrightarrow X = c \not\vdash (\forall x, X = x) \leftrightarrow (\forall x, X = c)$$

העליון של השווה הוא מעוגל, הסיבה היא כי השיעור אנחנו נתחיל לדבר על שוויון כסימן בשפה ואז הסימן הזה יהיה שוויון במטא שפה. כמו שהתחלנו לעבור לסוגריים מרובעים). באיזה השמות צד שמאל יהיה נכון? כאשר הפירוש של x יהיה הפירוש של c (כלומר $v[x] = I[c]$). אבל צד ימין יהיה נכון רק עבור מבנים שבהם התחום הוא סינגלטון. לכן במבנים בהם התחום איננו סינגלטון הנביעה הזו אכן לא מתקיימת.

האם הפוך נכון? (כלומר נביעה ימין לשמאל) מה שיש בצד ימין זה יהיה נכון רק עבור מבנה עם תחום שהוא סינגלטון, וצד שמאל אכן יהיה נכון במקרה כזה. לכן הכיוון ההפוך אכן נכון.

שוב, $a = b$ זה קיצור של $=(a, b)$.

דף השקילויות:

כל השקילויות הראשונות (1-5) מוכרות מבדידה.

1. בשביל לדחוף את המינוס קדימה ואז אפשר להעביר ל- nnf .
2. אומר שסדר הכמתים לא חשוב. צריך לשים לב לא רק מה כתוב אלא גם מה לא כתוב (כלומר אסור להחליף בין לכל וקיים).
3. מדבר על כימות ריק - אומר שאני יכול לכתוב ש- $\exists x 0 = 0$. זה פשוט שקול ל- $0 = 0$.
4. זה כלל אלפא המפורסם שבדרך כלל משתמשים בו במקרה ש- x אינו חופשי להצבה בנוסחא מסוימת, ואז מחליפים אותו במשתנה חדש והוא בטוח חופשי להצבה.
5. זה חוקי פילוג (חשוב לשים שוב מה לא נמצא שם, לדוגמא אסור לפתוח "לכל" עם "או").

הדברים החדשים הם מופיעים ב-6, אלא אותם דברים שמאפשרים להביא פסוקים לצורה פרנקסית - למשוך כמתים להתחלה של הנוסחאות. צריך לשים לב:

שלא יהיה בלבול עם מה שאמרנו לגבי דברים שלא נכונים ב- 5.

למשל: $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$

נרצה להעביר אותו לצורה פרנקסית נורמלית. נרצה להעביר אותו לזה - כל הכמתים בהתחלה. מה

שאנחנו לא יכולים לעשות זה להגיד: $\exists x p(x) \wedge q(x)$. הם לא שקולים.

אז מה אפשר לעשות? כתוב ב- 6 א (x לא חופשי אז אפשר לעשות):

$$\exists x (\exists x p(x) \wedge q(x))$$

מה הלאה? זה עוד לא צורה פרנקסית נורמלית. עדיין יש קיים שנמצא בתוך גם. אותו אי אפשר למשוך החוצה כבר לפי 6 כי x עכשיו כן מופיע חופשי (ב- $q(x)$). צריך לעשות שינוי משתנים, להגיד שזה שקול ל:

$$\exists x (\exists y p(y) \wedge q(x))$$

ועכשיו אפשר להשתמש בכלל שוב:

$$\exists x \exists y (p(y) \wedge q(x))$$

למעשה היה עדיף לעשות את שינוי המשתנים כבר בשלב הראשון, ולקבל:

$$\exists x p(x) \wedge \exists y q(y)$$

הערה: זהירות עם מה שקורה עם גרירה. צריך לשים לב להבדל בין $A \rightarrow \exists x B$ ו- $\exists x A \rightarrow B$. הראשון יכול לצאת החוצה (בתנאי ש- x לא מופיע חופשי) ב- A ונקבל:

$$\exists x (A \rightarrow B)$$

לעומת זאת - בשני (אם x לא חופשי ב- B) הקיים יתהפך ללכל:

$$\forall x (A \rightarrow B)$$

הסיבה היא שהנוסחא השניה היא בעצם: $\exists x A \wedge B$ שזה בעצם $\forall x A$.

לסיכום: כל פסוק אפשר להעביר לצורה פרנקסית נורמלית.

שלב השני - כדי לעבור לתורה אוניברסלית, הוא כבר תהליך אחר שנקרא תהליך סקולמיזציה (שהזכרנו רק בקצרה ממש בשיעור שעבר, ובתרגול ראינו איך זה מתבצע).

הרעיון הבסיסי הוא במשפט הבא:

משפט סקולם

תורה $T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \psi\}$ היא ספיקה אם"ם התורה הבאה ספיקה:

$T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \psi\}$. כאשר f היא סימן פונקציה n-מקומי חדש (שאינה מופיע ב-

$T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \psi\}$). ל- f אנחנו קוראים "פונקציה סקולם" (למרות שהיא לא פונקציה! היא רק סימן פונקציה... אבל ככה יצא).

הערה: אם $n=0$ אז אנחנו מכניסים קבוע חדש במקום סימן פונקציה חדש.

כשתהליך נגמר הפסוק הפך לכך שאין בו "קיים", ואם התורה היא סופית התהליך נגמר והיא ספיקה אם ורק אם התורה המקורית ספיקה. זה נקרא תהליך הסקולמיזציה.

נתן את ההוכחה, נאמר את השימוש בו, ונעבור לנושא הבא.

המשפט מאפשר לנו להעביר כל תורה T (סופית) לתורה T' שהיא אוניברסלית. (כל הפסוקים בה מתחילים ב- "לכל", "לכל" ... ואז פסוקים חסרי כמתים).
מה הקשר בין T ל- T' ?

אבחנה 1

לא מדובר על T ו- T' באותה השפה.
נניח T היא בשפה L אז T' היא בשפה L' שכוללת את L בתוספת קבועים וסימני פונקציה חדשים.
אז הבנו שלא מדובר באותה השפה. זה אומר שמושג הספיקות שכתוב בשקילות פעם אחת מדבר על מבנה M שקיים בו T ספיק עבור השפה המקורית. בצד השני של השקילות מדובר על מבנה עבור השפה החדשה עבורו T' תקף.
אז מראש זה לא יכול להיות אותו מבנה שיספק את T ואת T' .

אבחנה 2

מה שכן - נשים לב שאם $M' = \langle D, I' \rangle$ מבנה עבור L' אז $M = \langle D, I \rangle$ יהיה מבנה עבור L כאשר I הוא הצמצום של I' לסיגנטורה של L .
 I' נותנת מובן לדברים בסיגנטורה של L' - הצמצום אומר להתסכל רק על הפירושים של דברים שמופיעים ב- L . הקשר בין M' ל- M הוא שאם φ נוסחא בשפה L ו- v השמה ב- D אז:

$$M', v \models \varphi \Leftrightarrow M, v \models \varphi$$

אפשר להוכיח באינדוקציה על מבנה φ .

הוכחת המשפט:

א. נניח $\mathcal{T} \cup \{ \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \}$ ספיקה. נניח $M' = \langle D, I' \rangle$ מודל של תורה זו. כיוון ש:
 $\models_{FOL} \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi$ (אחת האקסיומות של HFOL ולהוסיף את ה"לכל"-ים על ידי כלל ההכללה וחוקי פילוג). אז $M' \models \mathcal{T} \cup \{ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \}$ ולכן
 $M = \langle D, I \rangle$ מודל של $\mathcal{T} \cup \{ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \}$ בשפה L כאשר I הוא הצמצום של I' לסיגנטורה של L (לפי אבחנה 2).

ב. (יותר קשה) נניח ש- $M = \langle D, I \rangle \models \mathcal{T} \cup \{ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \}$. נרצה להרחיב את המודל שיהיה מודל עבור השפה L' . בשביל זה אנחנו צריכים להוסיף פירוש ל- f . כיוון ש: $M \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi$ אז לכל $a_1, \dots, a_n \in D$ קיים $b \in D$ כך ש:

$$M, v[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n, y := b] \models \varphi \quad (*)$$

(המשתנים האחרים לא משנים, כי אלה המשתנים היחידים החופשיים ב- φ , כי אנחנו מדברים על פסוק הסולמיזציה עובדת על פסוקים. נזכר שלפני שהתחלנו התהליך דאגנו לסגור כך שזה יהיה פסוק).
נתאים לכל $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in D$ את $b_{a_1, \dots, a_n}$ המקיים את $(*)$ ונגדיר:

$$f^{I'}[a_1, \dots, a_n] = b_{a_1, \dots, a_n}$$

קל לראות ש- $M = \langle D, I' \rangle$ מודל של $\{ \forall x_1 \dots \forall x_n \psi \{ f(x_1, \dots, x_n) \} \}$ כאשר I , הוא ההרחבה של I המקיימת $I'[f] = f^I$.

אנקדוטה

באיזה עיקרון מתמטי השתמשנו בהוכחה? השתמשנו באקסיומת הבחירה. כי לכל $a_1, \dots, a_n$ יש הרבה b -ים כאלה ואנחנו בוחרים אחד. אפשר להוכיח את המשפט הזה ללא אקסיומת הבחירה אבל היא נהיית מאוד מסובכת.

ובאווירה זו נעבור לנושא חדש.

לוגיקות מסדר ראשון עם שוויון

עד עכשיו לא התייחסנו לסימן השוויון שום מעמד מיוחד, אבל אין ספק שצריך להיות לו. הוא מופיע בכל תחומי המתמטיקה והחיים. (איזו הקדמה..)

הכוונה כאן לשפות שבהן יש סימן יחס דו מקומי (= נזכור שבמטא שפה אנחנו נכתוב עכשיו את = עם מסולסל עליון כלומר נכתוב $\approx$) שהפירוש שלו אמור להיות יחס הזהות (כל דבר שווה לעצמו ולא לשום דבר אחר).

נסמן לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון בצורה $FOL^=$.

בשפה מסדר ראשון אמרנו שחייב להיות איזה שהוא סימן יחס, בשפה מסדר ראשון עם שוויון אנחנו כבר מקיימים את זה ואנחנו לא חייבים שיהיו לו עוד סימני יחס. נגדיר שוב מחדש הכל כמו ב- FOL , רק עבור $FOL^=$. הרוב הוא מאוד אותו דבר, אז אנחנו בעיקר נגדיר את הדברים המיוחדים.

מבנה עבור שפה מסדר ראשון עם שוויון הוא מבנה מסדר ראשון $\langle D, I \rangle$ המקיים ש:
 $I[=] \approx \{ \langle x, x \rangle \mid x \in D \}$
 למבנה כזה קוראים גם מבנה נורמלי לשפה עם שוויון.

עכשיו מגדירים מה זה מודל: שוב יש הבדל בין t -סיפוק לבין v -סיפוק.
 t -מודל של נוסחא φ בשפה מסדר ראשון עם שוויון הוא זוג $\langle M, v \rangle$ שבו M מבנה נורמלי ו-
 $M, v \models \varphi$ במובן הישן. v -מודל כנ"ל.

כעת לגבי נביעה:

$T \vdash_{FOL}^v \varphi$ אם כל v -מודל נורמלי של T הוא גם מודל נורמלי של φ . כנ"ל לגבי $\neg$ -נביעה.

ההגדרות מאוד דומות. עולה השאלה של האם צריך לפתח את הכל מחדש (משפט הקומפקטיות, משפט הרברנד וכו')? - האם הם נכונים עכשיו גם כאן? אי אפשר להסתמך עליהם כאן ישר... הבניה שלהם לא התייחסה לזה ששיון מקבל מעמד מיוחד.

למזלנו זה כן המצב - וזה כי יש לנו רדוקציה בין לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון ללוגיקה מסדר ראשון לאו דווקא עם יחוס מיוחד לשוויון.

בדף שקיבלנו יש את אקסיומת השוויון Eq (לכל שפה יש את אקסיומות השוויון שלה - כמו שבתחשיב HFOL יש לכל שפה את האקסיומות שלה).

מה יש בדף?

- 3 אקסיומות ראשונות אומרות שהשוויון הוא יחס שקילות.
- 2 הסכימות הבאות (זה לא אקסיומה אחת) - לכל סימן פונקציה יש אקסיומה שמתאימה לו. וכנ"ל עבור סימן יחס.

אם בשפה יש לנו חיבור וכפל - אז יש לנו 2 אקסיומות שוויון מתאימות. אחת תגיד ש:

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

אקסיומת שוויון אחרת תגיד עבור הכפל דבר דומה.

המשמעות של זה זה שעל דברים שווים - הפעולות עושים אותו דבר.

לגבי סימני יחס לדוגמא:

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow (x_1 < y_1 \rightarrow x_2 < y_2)$$

זה אומר שהשוויון הוא לא רק יחס שקילות - אלא גם יחס קונגרואנציה.

ברור שכל מבנה נורמלי מקיים את הדברים האלה, אבל יתכן שיש מבנים לא נורמלים שמקיימים את הדברים האלה.

הרדוקציה של $FOL =$ ל- FOL היא:

$$1. T \cup Eq(L) \vdash_{FOL}^E \varphi \text{ אם } T \vdash_{FOL=}^E \varphi$$

$$2. T \cup Eq(L) \vdash_{FOL}^v \varphi \text{ אם } T \vdash_{FOL=}^v \varphi$$

מה זה אומר רדוקציה? נניח הצלחנו לפתח כלים לקבוע האם φ היא נובעת מ- T ב- FOL . כלומר יש לנו כלים עבור זה. עכשיו אנחנו מתעסקים עם שפה עם שוויון ואנחנו רוצים לפתח כלים כדי לברר את זה. האם צריך לפתח האם מההתחלה? לא. רק את T כמו שהיא - יש להוסיף לה את אקסיומות השוויון הרלוונטיות (מספר סופי של אקסיומות) ועכשיו להפעיל את הכלים שכבר יש לנו על התורה החדשה (הכלים יכולים להיות משפט הרברנד וכו').

נשים לב שלאקסיומות השוויון יש תוכנה מאוד חשובה (מבחינה סינטקטית) - כל אקסיומות השוויון הם פסוקים אוניברסלים. וזה חשוב, כי זה יקל עלינו כשנדבר על הפעלת משפט הרברנד בנושא הזה.

הוכחת הרדוקציה:

אם שמאל נכון אז ימין נכון. נקח מודל נורמלי - הוא מודל של T והוא גם מודל של אקסיומות השוויון יהיה מודל נורמלי של T , אז הוא מודל של T וכל מודל נורמלי הוא מודל של אקסיומות השוויון. ואז הוא מודל התורה משאל ולכן הוא מספק את φ . הכיוון ההפוך הוא קצת יותר קשה. לא נוכיח אותו עד הסוף. אז כתרגיל יש לנו לעשות את הכיוונים הקלים לעשות בצורה מסודרת.

בכל זאת נגיד כמה מילים לגבי הכיוונים היותר קשה:

העיקר הוא איך לקחת מודל לא נורמלי של צד שמאל ולייצר ממנו מודל נורמלי של T (בהנתן זה שהוא מקיים את אקסיומות השוויון). במתמטיקה עושים את זה הרבה - מתחילים עם יחס שהוא לא זהות אמיתית והופכים אותו לכזה. נראה דוגמא.

דוגמא מבית הספר, אומרים ש: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

אם נכתוב: $\langle 3,4 \rangle = \langle 6,8 \rangle$ אף אחד לא יסכים. בראשון מדובר על איזה שהוא יחס שקילות שאנחנו מגדירים בין זוגות. אחרי זה מגדירים פעולות של חיבור, כפל וכו' ומראים אי תלות במייצגים (כלומר אקסיומות השוויון מתקיימות). ואז כדי שלא נצטרך לדבר על היחס, עוברים למחלקות השקילות (קבוצת המנה).

זה מה עושים פה באופן כללי - לוקחים מודל שהפירוש של יחס השוויון הוא לאו דווקא זהות אבל הוא יחס שקילות והוא יחס קונגוארציה. אז עוברים לקבוצת המנה – מגדירים את הפעולות והיחסים בעזרת מייצגים (אקסיומות השוויון דואגות שלא תהיה תלות במייצגים).